Semana Olímpica 2011 - Nível U
Yuri Lima

Polinômios

$\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$

- Algoritmo da divisão
- Critério de Eisenstein
- Lema de Gauss

$\mathbb{R}[X]$

- Teorema do valor intermediário

$\mathbb{C}[X]$

- Interpolação de Lagrange
- Teorema fundamental da álgebra

1. (Canadá) Seja f um polinômio não identicamente nulo de coeficientes inteiros. Se $f(0)$ e $f(1)$ são ímpares, mostre que f não tem raízes inteiras.

2. (Romênia) Sejam a e n inteiros, com $n > 1$, e p um primo tal que $p > |a| + 1$. Prove que $f(X) = X^n + aX + p$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}[X]$.

3. Seja $f(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tal que a_0 é primo e
$$|a_0| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$
Mostre que $f(X)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.

4. Seja f um polinômio de grau n tal que $f(0), f(1), \ldots, f(n) \in \mathbb{Z}$. Mostre que $f(x) \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{Z}$.

5. Seja $P(X) = c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$ um polinômio de coeficientes inteiros. Suponha que r é um racional tal que $P(r) = 0$. Mostre que os n números
$$c_nr,\ c_nr^2 + c_{n-1}r,\ c_nr^3 + c_{n-1}r^2 + c_{n-2}r, \ldots,$$
$$c_nr^n + c_{n-1}r^{n-1} + \cdots + c_1r$$
são inteiros.

6. (Ibero-U 2003) Prove que se $p(X)$ é um polinômio em $\mathbb{Z}[X]$, então existe n inteiro tal que $p(n)$ tem mais de 2003 fatores primos distintos.

7. (IMO 2006) Seja $P(X)$ um polinômio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinômio
$$Q(X) = P(P(\cdots P(P(X))\cdots)),$$
onde P aparece k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

8. (Moldávia) Determine todos os polinômios $P(X)$ tais que $P(0) = 0$ e $P(x^2+1) = P(x)^2+1$ para todo real x.

9. (Teste IMO Brasil 2001) Os polinômios com coeficientes reais $P(X)$ e $Q(X)$, ambos com pelo menos uma raiz real, satisfazem
$$P(1 + X + (Q(X))^2) = Q(1 + X + (P(X))^2).$$
Prove que os polinômios $P(X)$ e $Q(X)$ são iguais.

10. Seja f um polinômio mônico de coeficientes reais sem raízes reais. Mostre que existem polinômios g e h de coeficientes reais tais que
$$f(X) = g(X)^2 + h(X)^2\,.$$

11. Suponha que a, b, c sejam complexos e que as três raízes da equação
$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$
têm módulo igual a 1. Prove que as três raízes da equação
$$X^3 + |a|X^2 + |b|X + |c| = 0$$
também têm módulo igual a 1.

12. (USAMO 1976) Se $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$, $S(X)$ são polinômios tais que
$$P(X^5) + X \cdot Q(X^5) + X^2 \cdot R(X^5) =$$
$$(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \cdot S(X),$$
mostre que $X - 1$ é um fator de $P(X)$.

13. (IMC 2002) Seja $f(z) = a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Prove que se as raízes de f estão no semiplano esquerdo $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) < 0\}$, então $a_ka_{k+3} < a_{k+1}a_{k+2}$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-3$.