Números primos e seus mistérios.

Definição
Um número inteiro n ($n > 1$) possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado primo. Se $n > 1$ não é primo dizemos que n é composto.

Teorema 1. Se $p|ab$, p primo, então $p|a$ ou $p|b$.

Teorema 2. Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.

Teorema 3. A sequência dos números primos é infinita.

Teorema 4. Se $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, com p_1, p_2, $\ldots$, p_r números primos a_i inteiros não negativos então o total de divisores positivos de n é $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_r + 1)$.

Problema 1. (OBM) São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

Solução.
Lema.
Dado um número n, composto, então ele possui um fator primo ($\neq 1$) menor ou igual à raiz quadrada deste número.
Demonstração. Se $n = a \cdot b$, podemos ter ou $a < \sqrt{n}$, $a = \sqrt{n}$ ou $a > \sqrt{n}$:
1) $a = \sqrt{n}$
2) $a < \sqrt{n}$
3) $a > \sqrt{n} \Rightarrow b = \dfrac{n}{a} < \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Em qualquer caso, temos um fator menor ou igual a $\sqrt{n}$ e diferente de 1.

Dado $1 < n < 1998$, se ele não for primo, ele tem que ter um fator primo menor que $\sqrt{1998}$, ou seja, um fator primo, menor que 45. Como só existem 14 primos menores que 45, e são 15 números, então um desses não terá fator primo menor que 45, logo será primo.

Problema 2. Prove que existem 2013 números compostos consecutivos.

Problema 3. (OCM) Sejam a_1, a_2, $\ldots$, a_{13} inteiros positivos e p_1, p_2, $\ldots$, p_{13} números primos. Sabe - se que:

$$a_1 + a_2 = p_1$$

$$a_2 + a_3 = p_2$$
$$a_3 + a_4 = p_3$$
$$\vdots$$
$$a_{13} + a_1 = p_{13}$$

Encontre o valor do menor elemento dos conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{13}\}$ e $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_{13}\}$.

Problema 4. (OBM) Determine todos os números primos m e n tais que $0 < m < n$ e os três números

$$2m + n, \ m + 2n \text{ e } m + n - 18$$

sejam também primos.

Problema 5. (OCM) Determine o valor de p, maior que um, de modo que p, $p + 2$ e $p + 4$ sejam números primos positivos. Mostre que o valor de p é único.

Problema 6. (Hong Kong) Determine o maior primo p tal que $p^3 + p^2 + 11p + 2$ é também primo.

Problema 7. (Seletiva do Brasil para a IMO) Sejam p e q primos ímpares consecutivos. Prove que $p + q$ é o produto de pelo menos três inteiros positivos maiores do que 1 (não necessariamente distintos).

Problema 8. (OBM) Determine todos os primos que são a soma e diferença de dois primos.

Problema 9. (Portugal) Prove que existe um único número primo p tal que $2p + 1$ seja um cubo perfeito.

Problema 10. Determine todos os inteiros positivos a e b tais que $a^4 + 4b^4$ é primo.

Problema 11. Sejam a, b, c e d números inteiros positivos tais que $ab = cd$. Prove que $a + b + c + d$ não é primo.

Problema 12. Determine todos os inteiros positivos n tais que $3n - 4$, $4n - 5$ e $5n - 3$ são todos primos.

Problema 13. (OCM) Determinar os inteiros $n > 1$ que são divisíveis por todos os primos menores do que n.

Problema 14. (OCM) Qual o menor inteiro positivo com o mesmo número de divisores de 2004?

Curiosidade

(Conjectura de Goldbach) Todo número inteiro par maior que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos. (Até hoje ninguém conseguiu apresentar uma solução para essa afirmação.)