# XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática
# GABARITO Primeira Fase

## Soluções Nível Universitário

**Solução do Problema 1:**

Temos $A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ **[4 pontos]**, donde $A^{4k} = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$.

Em particular, $A^{2004} = \begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}$. **[+6 pontos]**

Soluções cujo único erro se refere aos sinais: **[até 7 pontos]**

**Segunda Solução do Problema 1:**

Diagonalizando $A$, temos $A = XDX^{-1}$ onde $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$ **[5 pontos]**

Assim, $A^{2004} = X\begin{pmatrix} (1+i)^{2004} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^{2004} \end{pmatrix}X^{-1} = X\begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}X^{-1} = \begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}$. **[+5 pontos]**

**Solução do Problema 2:**

Por substituição, $\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^{-x}}dx$. **[3 pontos]**

Assim

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^{-x}}dx\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{2004}\left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{2004}dx = \int_{0}^{1} x^{2004}dx = \frac{1}{2005}.$$ **[+ 7 pontos]**

**Solução do Problema 3:**

Queremos encontrar $a$ e $b$ tais que, $P = 3x^4 - 4x^3 - ax - b$ tenha duas raízes reais duplas; em particular, $P$ deve ser um quadrado perfeito. **[3 pontos]**

$$3x^4 - 4x^3 - ax - b = (cx^2 + dx + e)^2$$
$$= c^2x^4 + 2cdx^3 + (2ce + d^2)x^2 + 2dex + e^2$$

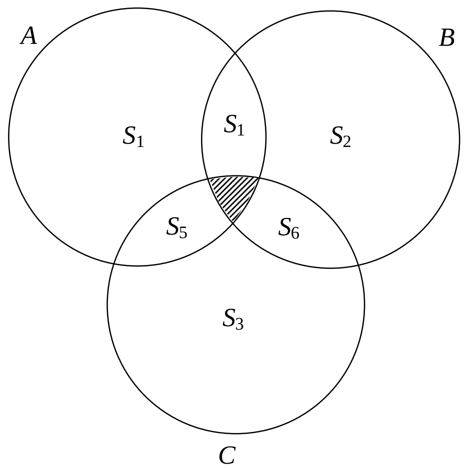
implica em $c = \pm\sqrt{3}, d = -2\frac{c}{3}$, $e = -2\frac{c}{9}$ donde $a = \frac{-8}{9}$, $b = \frac{-4}{27}$. **[+7 pontos]**

Assim a reta tem equação $y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}$.

Tentativas de colocar a curva numa forma normal sem completar a solução: **[até 3 pontos]**.

**Solução do Problema 4:**

Vamos contar inicialmente o número de escolhas tais que $A \cap B \cap C = \varnothing$.




Cada elemento de $\{1,2,\ldots,n\}$ pode ser colocado em um dos 7 subconjuntos indicados acima ($S_1$, $S_2$, …,$S_7$). Logo há $7^n$ tais escolhas. **[4 pontos]**

Fazendo um raciocínio similar, temos, dentre essas escolhas, $6^n$ com $A \cap B = \varnothing$; $6^n$ com $A \cap C = \varnothing$ e $5^n$ com $A \cap B = \varnothing$ e $A \cap C = \varnothing$. **[+3 pontos]**

Portanto, pelo princípio de Inclusão-Exclusão, há $7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n$ maneiras de escolher $A$, $B$, $C$.

**[+3 pontos]**

**Solução Alternativa do Problema 4:**

Fixe o número $k$ de elementos de $A \cap B$ ($1 \le k \le n$), e $j$ de $A \cap C$ ($1 \le j \le n - k$).

Há $\binom{n}{k}$ modos de escolher esses $k$ elementos, $\binom{n-k}{j}$ modos de escolher os $j$ e 5 regiões permitidas para cada um dos outros $n - k - j$ elementos, de forma que a resposta é:

$$R = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j} 5^{n-k-j} = \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} 5^{n-k-j} \right)$$

Utilizando o binômio de Newton, tem-se $\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 5^{n-k-j} = (1+5)^{n-k} = 6^{n-k}$.

Portanto, $R = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} = 7^n - 6^n - (6^n - 5^n) = 7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n$.

Critério para correção dessa solução:

Escrever a resposta como um somatório correto: **[3 pontos]**

Calcular corretamente algum somatório do tipo $\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} x^{t-k}$ : **[+2 pontos]**

Encontrar a resposta correta: **[+5 pontos]**

**Solução do Problema 5:**

Se $k \geq 3$, qualquer submatriz de ordem $k$ de $A$ determinada por $k$ linhas e $k$ colunas tem determinante $O$. De fato, se $j_1 < j_2 < j_3$ são índices de 3 das $k$ colunas da submatriz, denotando essas colunas por $C_{j_1}, C_{j_2}$ e $C_{j_3}$, temos que todas as entradas de $C_{j_2} - C_{j_1}$ são iguais a $j_2 - j_1$ e todas as entradas de $C_{j_3} - C_{j_2}$ são iguais a $j_3 - j_2$, donde $C_{j_3} - C_{j_2} = \frac{j_3 - j_2}{j_2 - j_1} \cdot (C_{j_2} - C_{j_1})$, e logo $C_{j_3} = \frac{j_3 - j_1}{j_2 - j_1} \cdot C_{j_2} - \frac{j_3 - j_2}{j_2 - j_1} \cdot C_{j_1}$. **[2 pontos]**

Assim, $\varphi(n)$ é a soma dos determinantes das submatrizes de $A$ de ordem 1 ou 2. A soma dos determinantes das submatrizes de $A$ de ordem 1 é $\sum_{m=1}^{n^2} m = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$. **[1 ponto]**

As submatrizes de ordem 2 são obtidas da seguintes forma:
Dados $1 \leq a < b \leq n$ e $1 \leq c < d \leq n$, associamos a seguinte submatriz de ordem 2:
$\begin{pmatrix} n(a-1)+c & n(a-1)+d \\ n(b-1)+c & n(b-1)+d \end{pmatrix}$, cujo determinante é
$n((a-1)d + (b-1)c - (b-1)d - (a-1)c) = n(a-b)(d-c)$. Assim, a soma dos determinantes das submatrizes de ordem 2 é

$$n\left(\sum_{1\leq a<b\leq n} (a-b)\right)\left(\sum_{1\leq c<d\leq n} (d-c)\right) = -n\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i)\right)^2 = -n\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{j-1} r\right)^2 = -n\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)}{2}\right)^2 =$$ **[3 pontos]**

$= -\frac{n}{4}\left(\frac{n^3}{3} + g(n)\right)^2$, onde $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^3} = 0$ (de fato, $g(n)$ é um polinômio de grau 2).

Assim, como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^7}\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^7} \cdot \left(-\frac{n}{4}\left(\frac{n^3}{3} + g(n)\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{g(n)}{n^3}\right)^2\right) = -\frac{1}{36}$,

Temos $\lambda = 7$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n^7} = -\frac{1}{36}$. **[+4 pontos]**

Solução correta apenas do item $a$): **[6 pontos]**

Solução completa: **[10 pontos]**

**Solução do problema 6:**

Decompondo em frações parciais, procuramos constantes $A$, $B$ e $C$ tais que:

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} = \frac{A}{3k+1} + \frac{B}{3k+2} + \frac{C}{3k+3} \quad (1)$$

Comparando os numeradores, verifica-se que (1) é identidade para $A=\frac{1}{2},\ B=-1,\ C=\frac{1}{2}$.

Sendo $S$ a soma procurada: $2S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1}-\frac{2}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}$.

Como $\frac{1}{3k+1}=\int_0^1 x^{3k}dx$, tem-se $2S=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{3k}-2x^{3k+1}+x^{3k+2}\right)dx$.

Trocando a integral com o somatório e somando a *PG* infinita:

$$2S=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k}-2x^{3k+1}+x^{3k+2}\right)dx=\int_0^1\left((1-2x+x^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k}\right)dx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{1-x^3}dx$$

$$2S=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{-(2x+1)+3}{x^2+x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\ln 3+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo, $S=\frac{\pi\sqrt{3}-3\ln 3}{12}$

**Critério para correção:**

Expressar $\frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$ como soma de frações mais simples: **[3 pontos]**

Reduzir corretamente o problema ao cálculo de uma integral: **[4 pontos]**

Calcular a integral **[3 pontos]**

**Observação:** Uma solução alternativa é escrever cada parcela como $\int_0^1\int_0^z\int_0^y x^{3k}\,dxdydz$ e então somar a *PG*.