XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA **1ª. Fase Olimpíada Regional**
Primeira Fase – Nível 3 **BA - ES - GO - RJ - RN - RS - SC - SP**

- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

01. Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

02. Em um hotel há 100 pessoas. 30 comem porco, 60 comem galinha e 80 comem alface. Qual é o maior número possível de pessoas que não comem nenhum desses dois tipos de carne?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

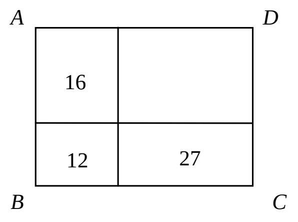
03. Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

A) 16 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

04. Sendo $a \neq b$ e $b \neq 0$, sabe-se que as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são exatamente a e b. Então, $a - b$ é igual a:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

05. Um retângulo *ABCD* está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão na figura abaixo. Qual é a área do retângulo *ABCD*?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

06. Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?

A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

07. A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x - 45)^2 - (x - 21)^2 = 0$ é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

08. Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\dfrac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

09. Se $0^0 < x < 90^0$ e $\cos x = \dfrac{1}{4}$ então x está entre:

A) 0^0 e 30^0 B) 30^0 e 45^0 C) 45^0 e 60^0 D) 60^0 e 75^0 E) 75^0 e 90^0

10. Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e a seguir, ainda pagou R$ 2,00 de estacionamento. Se no final ainda tinha R$ 8,00, que quantia tinha Pedro ao sair de casa?
A) R$ 220,00 B) R$ 204,00 C) R$ 196,00 D) R$ 188,00 E) R$ 180,00

11. Para todo n natural definimos a função f por:

$f(n) = \dfrac{n}{2}$ se n é par,

$f(n) = 3n+1$ se n é ímpar.

O número de soluções da equação $f(f(f(n))) = 16$ é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. O número N = 11111 . . . 11 possui 1999 dígitos, todos iguais a 1. O resto da divisão de N por 7 é:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

13. Um quadrado *ABCD* possui lado 40cm. Uma circunferência contém os vértices *A* e *B* e é tangente ao lado *CD*. O raio desta circunferência é:

A) 20cm B) 22cm C) 24cm D) 25cm E) 28cm

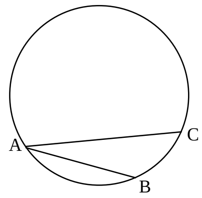
14. Os pontos *S*, *T* e *U* são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo *PQR* sobre os lados *RQ*, *RP* e *PQ* respectivamente. Sabendo que os comprimentos dos arcos *TU*, *ST* e *US* estão na razão *TU* : *ST* : *US* = 5 : 8 : 11, a razão $\angle TPU : \angle SRT : \angle UQS$ é igual a :

A) 7 : 4 : 1 B) 8 : 5 : 2 C) 7 : 3 : 2 D) 11 : 8 : 5 E) 9 : 5 : 1

15. Para quantos valores inteiros de x existe um triângulo acutângulo de lados 12, 10 e x?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

16. A circunferência abaixo tem raio 1, o arco AB mede 70^0 e o arco BC mede 40^0. A área da região limitada pelas cordas AB e AC e pelo arco BC mede:



A) $\pi/8$ B) $\pi/9$ C) $\pi/10$ D) $\pi/12$ E) $\pi/14$

17. A reta *r* contém os pontos (0, 4) e (7, 7). Dos pontos abaixo, qual é o mais próximo da reta *r*?

A) (1999, 858) B) (1999, 859) C) (1999, 860) D) (1999, 861)
E) (1999, 862)

18. Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação
$2x + 3y = 101$?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

19. Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).

A) 90 B) 98 C) 112 D) 118 E) 120

20. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada verificou-se que no aquário, 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

A) 15% B) 37% C) 50% D) 67% E) 84%

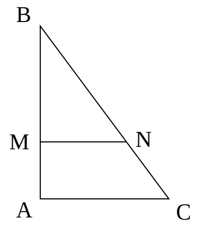
21. Hoje, 12/6/1999, Pedro e Maria fazem aniversário. No mesmo dia em 1996, a idade de Pedro era 3/4 da idade de Maria. No mesmo dia em 2002, a idade de Pedro será igual à de Maria quando ele tinha 20 anos. Quantos anos Maria está fazendo hoje?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

22. No quadrado *ABCD* o ponto *E* é médio de *BC* e o ponto *F* do lado *CD* é tal que o ângulo *AEF* é reto. Aproximadamente, que porcentagem a área do triângulo *AEF* representa da área do quadrado?

A) 28% B) 31% C) 34% D) 36% E) 39%

23. Dois irmãos herdaram o terreno *ABC* com a forma de um triângulo retângulo em *A*, e com o cateto *AB* de 84m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área, por um muro *MN* paralelo a *AC* como mostra a figura abaixo. Assinale a opção que contém o valor mais aproximado do segmento *BM*.



A) 55m B) 57m C) 59m D) 61m E) 63m

24. As representações decimais dos números 2^{1999} e 5^{1999} são escritas lado a lado. O número de algarismos escritos é igual a :

A) 1999 B) 2000 C) 2001 D) 3998 E) 3999

25. Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. O menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver *pelo menos* 10 bolas da mesma cor é :

A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 38

GABARITO

Terceiro Nível (Ensino Médio)

1) B	**6) C**	**11) C**	**16) B**	**21) B**
2) D	**7) A**	**12) A**	**17) D**	**22) B**
3) D	**8) C**	**13) D**	**18) E**	**23) C**
4) D	**9) E**	**14) A**	**19) E**	**24) B**
5) E	**10) D**	**15) A**	**20) D**	**25) E**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1) 1 saco = 8 tijolos. Se o caminhão pode carregar ainda 18 sacos então pode carregar $18 \times 8 = 144$ tijolos.
2) Supondo que todos os que comem galinha também comem porco então 40 pessoas, no máximo, não comem nenhum desses dois tipos de carne.
3) Imagine que B esteja a direita de A. O gafanhoto deve, em alguma ordem, dar 7 pulos para a Direita e 2 para a Esquerda. Uma trajetória possível é, por exempo,
DDDEDDEDD. O número de listas deste tipo é $C_9^2 = 36$.
4) Sendo $a + b = -a$ e $ab = b$ conclui-se que $a = 1$ e $b = -2$.
5) Se dois retângulos possuem mesma altura então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Se dois retângulos possuem mesma base, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas. Isto permite concluir que o retângulo grande tem base $4 + 9 = 13$ e altura $3 + 4 = 7$. Sua área é, portanto, $13 \times 7 = 91$.
6) As figuras possuem um total de $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$ lados. As costuras são 90.
7) Fatorando, obtemos $y = (3x - 66)(x - 24)$. As raízes são 22 e 24.
8) $\frac{x+99}{x+19} = 1 + \frac{80}{x+19}$. Este número é inteiro se, e somente se, $x + 19$ for divisor de 80. Como 80 tem 20 divisores inteiros, então existem 20 valores de x.
9) Considere um quadrante AOB de raio 1 (ponha OA horizontal). Sobre OA considere os pontos M e N tais que $OM = 1/2$ e $ON = 1/4$. Trace MC e NX perpendiculares a OA (C e X no arco AB). Assim, arc$AC = 60^o$, arc$AX = x$ e $\cos x = 1/4$. NX encontra a corda BC no seu ponto médio P. Considere o ponto Q do arco BC tal que PQ seja perpendicular à corda BC. Assim, Q é médio do arco BC e, portanto, arc$AQ = 75^o$. Logo $x > 75^o$.
10) Faça as contas de trás para frente: $(8 + 2).2 = 20$, $(20 + 2).2 = 44$, $(44 + 2).2 = 92$ e $(92 + 2).2 = 188$.
11) $f(32) = 16$ e $f(5) = 16$. Na etapa anterior temos apenas $f(64) = 32$ e $f(10) = 5$. Na etapa anterior a esta temos $f(128) = 64$, $f(21) = 64$, $f(20) = 10$ e $f(3) = 10$. Há 4 soluções.
12) Os restos das divisões de 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 por 7 são respectivamente 1, 4, 6, 5, 2, 0, e isto se repete em ciclos de 6. Como o resto da divisão de 1999 por 6 é 1, então o resto da divisão de N por 7 é também 1.
13) Sejam: O o centro da circunferência e M o ponto médio de AB. No triângulo retângulo OMA temos $OA = R$, $MA = 20$ e $OM = 40 - R$. O teorema de Pitágoras fornece $R = 25$.
14) Seja O o centro do círculo, e observemos que $5 + 8 + 11 = 24$, $360 : 24 = 15$, e daí, $\angle TOU = 5 \times 15° = 75°$, $\angle SOT = 8 \times 15° = 120°$ e $\angle UOS = 11 \times 15° = 165°$. Como $OU \perp PQ$, $OS \perp QR$ e $OT \perp RP$, segue-se que $\angle TPU + \angle TOU = \angle SRT + \angle SOT = \angle UQS + \angle UOS = 180°$ e portanto, $\angle TPU = 105°$, $\angle SRT = 60°$ e $\angle UQS = 15°$ e estes estão na razão 7 : 4 : 1.
15) Se x é o maior lado, devemos ter $x^2 < 10^2 + 12^2$, ou seja, $x < \sqrt{244} \cong 15,6$. Se $10 < x < 12$ o triângulo é acutângulo. Se x é o menor lado, devemos ter $x^2 > 12^2 - 10^2$, ou seja, $x > \sqrt{44} \cong 6,6$. Assim, $x = 7, 8, 9, \ldots, 15$. Existem 9 valores possíveis de x.

16) Seja O o centro da circunferência. Trace o diâmetro AD. Como o arco CD mede 70^o temos que BC é paralelo a AD. Assim, a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo OBC. Logo a área da região solicitada é igual à área do setor OBC de ângulo central 40^o. Como 40 = 360/9, a área da região é $\pi/9$.

17) A reta que contém (0, 4) e (7, 7) tem equação $y = \frac{3}{7}x + 4$. Para x = 1999 obtemos

$y \cong 860{,}7$. Logo, o ponto mais próximo é (1999, 861).

18) Como $x = \frac{101 - 3y}{2}$, temos que y é ímpar. Assim, y = 1, 3, 5, …, 33. Como esta sequência possui 17 elementos concluimos que existem 17 pares (x, y) nas condições do enunciado.

19) Cada sub-conjunto de {1, 2, 3, …, 9} com dois ou três elementos fornece apenas um número cujos dígitos estão em ordem estritamente crescente. Assim, temos entre 10 e 1000, $C_9^2 + C_9^3 = 120$ números.

20) Imagine um aquário com 100 peixes sendo A = 90 e V = 10. Se x peixes amarelos morreram e depois ainda havia 75% de peixes amarelos no aquário, temos que

$90 - x = \frac{75}{100}(100 - x)$, o que dá x = 60. Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de 2/3, ou seja, aproximadamente 67%.

21) Sejam: p a idade de Pedro e $p + d$ a de Maria. A primeira fornece a equação

$p - 3 = \frac{3}{4}(p + d - 3)$ e a segunda, $p + 3 = 20 + d$. Resolvendo o sistema, obtemos

$d = 7$, $p = 24$ e $p + d = 31$.

22) Considere AB = 4. Como os triângulos ABE e ECF são semelhantes temos que CF = 1 e DF = 3. Calculando as áreas dos triângulos temos: (ADF) = 6, (ECF) = 1, (ABE) = 4 e, consequentemente, (AEF) = 5. A área de AEF representa $\frac{5}{16} \cong 31\%$ da área do quadrado.

23) Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança temos $\frac{(AMN)}{(ABC)} = \frac{1}{2} = \frac{AM^2}{AB^2}$. Daí, $AM = 42\sqrt{2} \cong 59$.

24) Usaremos o fato de que $2^{1999} \times 5^{1999} = 10^{1999}$. Suponhamos que 2^{1999} possua m algarismos e que 5^{1999} possua n algarismos. Então :

$$10^{m-1} < 2^{1999} < 10^m,\ 10^{n-1} < 5^{1999} < 10^n$$

e assim

$$10^{m+n-2} < 10^{1999} < 10^{m+n}$$

Daí $1999 = m + n - 1$ e assim $m + n = 2000$.

25) Claramente, 37 bolas não são suficientes uma vez que entre elas podem estar as 10 bolas brancas e pretas e 9 de cada uma das outras. Por outro lado, 38 bolas garantem que temos pelo menos 28 bolas que não são nem brancas e nem pretas e uma vez que $28 = 3 \cdot 9 + 1$ pelo Princípio da Casa dos Pombos temos certamente 10 bolas da mesma cor.