

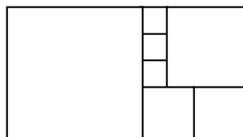
XXV OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2

1ª. Fase Olimpíada Regional
AL – BA – GO – PA – PB – PI – RS – RN – SC

7 de junho de 2003

- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

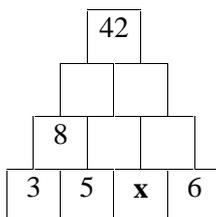
1. O retângulo da figura a seguir está dividido em 7 quadrados. Se a área do menor quadrado é igual a 1, a área do retângulo é igual a:



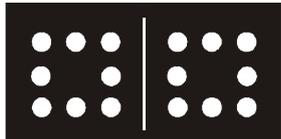
- A) 42 B) 44 C) 45 D) 48 E) 49
2. Você possui muitos palitos com 6cm e 7cm de comprimento. Para fazer uma fila de palitos com comprimento total de 2 metros, o número mínimo de palitos que você precisa utilizar é:
- A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33
3. A maior raiz da equação $(x - 37)^2 - 169 = 0$ é:
- A) 39 B) 43 C) 47 D) 50 E) 53
4. Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x , e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por $2x + 1$. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por $3x - 1$. Se no visor está o número 5, apertando alguma seqüência das teclas A e B, o maior número de dois algarismos que se pode obter é:
- A) 85 B) 87 C) 92 D) 95 E) 96
5. Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, o valor de x é:

1	14	x
26		13

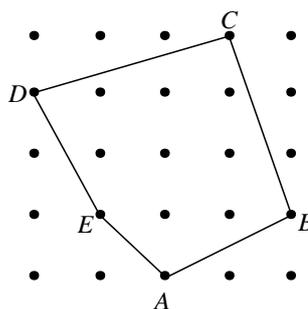
- A) 20 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27
6. Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:
- A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8
7. Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casinha. Os outros números nas três linhas superiores são obtidos da mesma forma. Qual é o valor de x ?



- A) 7 B) 3 C) 5 D) 4 E) 6

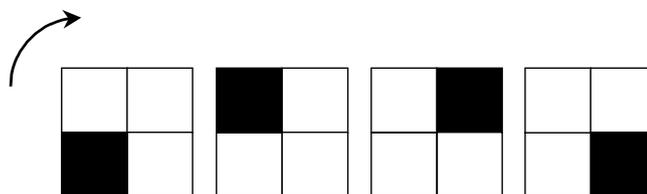
8. Considere um número inteiro x e faça com ele as seguintes operações sucessivas: multiplique por 2, some 1, multiplique por 3 e subtraia 5. Se o resultado foi 220, o valor de x é:
- A) um número primo.
 B) um número par.
 C) um número entre 40 e 50.
 D) um número múltiplo de 3.
 E) um número cuja soma dos algarismos é 9.
9. Os números a , b , e c são naturais consecutivos em ordem crescente. Então, o valor de $c^2 - ab$ é igual a:
- A) 0 B) 1 C) $2a + b$ D) $2a + c$ E) $2b + c$
10. Considere a seqüência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... O 2003º termo desta seqüência é:
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
11. Considere as seguintes definições:
- A *média aritmética* de dois números reais positivos é a metade da sua soma.
 - A *média harmônica* de dois números reais positivos é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.
- A diferença entre a média aritmética e a média harmônica dos números 4 e 6 é:
- A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,5
12. A seqüência “22” descreve a si mesma, pois ela é formada por exatamente dois 2. Analogamente, a seqüência “31 12 33 15” descreve a si mesma, pois é formada por exatamente três 1, um 2, três 3 e um 5. Qual das seguintes seqüências *não* descreve a si mesma?
- A) 21 32 23 16 B) 31 12 33 18 C) 31 22 33 17 19
 D) 21 32 33 24 15 E) 41 32 23 24 15 16 18
13. O dominó mais conhecido tem como maior peça o duplo 6. Neste dominó são empregadas 28 peças diferentes. Quantas peças tem o dominó cuja maior peça é o duplo 8?
- A) 34 B) 36 C) 42 D) 55 E) 45
- 
14. Os quadrados dos números naturais maiores do que 2, subtraídos de seus sucessores, formam a seqüência 5, 11, 19, O primeiro elemento dessa seqüência que não é um número primo é o:
- A) quarto B) décimo C) sexto D) nono E) sétimo
15. Você está em um país estrangeiro, a LUCIÂNIA, e não conhece o idioma, o LUCIANÊS, mas sabe que as palavras “BAK” e “KAB” significam *sim* e *não*, porém não sabe qual é qual. Você encontra uma pessoa que entende português e pergunta: “KAB significa *sim*?” A pessoa responde “KAB”. Pode-se deduzir que:
- A) KAB significa *sim*.
 B) KAB significa *não*.
 C) A pessoa que respondeu mentiu.
 D) A pessoa que respondeu disse a verdade.
 E) Não é possível determinar sem um dicionário LUCIANÊS-PORTUGUÊS.

16. Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm.



A área do pentágono $ABCDE$, em cm^2 , é igual a:

- A) 9 B) $\frac{19}{2}$ C) 10 D) $\frac{21}{2}$ E) 11
17. As 4 colorações a seguir são consideradas iguais por coincidirem por rotação.



De quantos modos diferentes é possível colorir as casas de um tabuleiro 2×2 de branco ou preto de modo que não existam dois tabuleiros que coincidam por rotação?

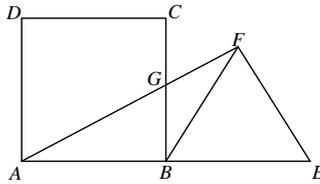
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8
18. O valor da soma $\frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}}$ é:
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2
19. Considere os números $X = 2^{700}$, $Y = 11^{200}$ e $Z = 5^{300}$. Assinale a alternativa correta:
- A) $X < Z < Y$ B) $Y < X < Z$ C) $Y < Z < X$ D) $Z < X < Y$ E) $Z < Y < X$

20. Beatriz, Isabele e Nicole estão disputando um jogo fazendo lançamentos sucessivos com uma moeda. Beatriz ganha se, em dois lançamentos consecutivos, o primeiro resultar cara e o segundo coroa. Isabele ganha se forem obtidas duas coroas em dois lançamentos consecutivos, e Nicole ganha se forem obtidas duas caras em dois lançamentos consecutivos. Elas fazem os lançamentos até que uma das jogadoras seja vencedora. Qual(is) jogadora(s) possui(em) menos chances de ganhar o jogo?
- A) Beatriz B) Isabele C) Nicole D) Beatriz e Nicole
E) As três têm a mesma chance.

12. Camila e Lara estão disputando o seguinte jogo num tabuleiro 4×4 : Camila marca algumas casas do tabuleiro e informa à Lara o número de casas marcadas na vizinhança de cada casa do tabuleiro. Neste jogo, duas casas distintas são consideradas vizinhas se possuem um lado ou um canto (vértice) em comum. Lara deve descobrir quais casas foram marcadas por Camila. Após marcar algumas casas, Camila passou para Lara o seguinte tabuleiro:

1	2	1	1
0	2	1	2
2	3	3	1
1	0	2	1

- O número de casas marcadas foi:
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
13. Divida os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 em dois grupos x e y com produtos A e B , respectivamente, de modo que $A - B = 1$.
A soma dos algarismos de A é:
- A) 10 B) 11 C) 13 D) 14 E) 15
14. A figura a seguir mostra um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero BEF , ambos com lado de medida 1cm. Os pontos A, B e E são colineares, assim como os pontos A, G e F .



- A área do triângulo BFG é, em cm^2 :
- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ E) $\frac{3}{10}$
15. Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: “O número que você pensou é maior, menor ou igual a x ?”. Note que x é um número que Pedrinho escolhe.
Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá ter que fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?
- A) 5 B) 7 C) 15 D) 25 E) 45
16. No triângulo ABC , $AB = 20$, $AC = 21$ e $BC = 29$. Os pontos D e E sobre o lado BC são tais que $BD = 8$ e $EC = 9$. A medida do ângulo $D\hat{A}E$, em graus, é igual a:
- A) 30 B) 40 C) 45 D) 60 E) 75

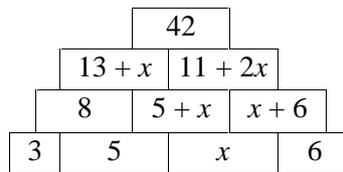
GABARITO – PRIMEIRA FASE

GABARITO NÍVEL 2

1) C	6) C	11) B	16) B	21) B
2) A	7) E	12) D	17) C	22) C
3) D	8) A	13) E	18) C	23) D
4) D	9) E	14) C	19) C	24) A
5) E	10) C	15) D	20) B	25) C

Soluções

1. Veja a solução do problema N^o. 7 do Nível 1. **(Alternativa C).**
2. Veja a solução do problema N^o. 3 do Nível 1. **(Alternativa A).**
3. $(x - 37)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x - 37 = 13$ ou $x - 37 = -13$. Assim $x = 50$ ou $x = 24$. **(Alternativa D).**
4. Veja a solução do problema N^o. 17 do Nível 1. **(Alternativa D).**
5. Veja a solução do problema N^o. 4 do Nível 1. **(Alternativa E).**
6. O algoritmo final de $n^3 - n^2$ é o mesmo algoritmo final de $7^3 - 7^2 = 294$. **(Alternativa C).**
- 7.



$$(13 + x) + (11 + 2x) = 42 \Leftrightarrow x = 6. \text{ (Alternativa E).}$$

8. Veja a solução do problema N^o. 5 do Nível 1. **(Alternativa A).**
9. $a = c - 2, b = c - 1$.
 $c^2 - ab = c^2 - (c - 2)(c - 1) = c^2 - (c^2 - 3c + 2) = 3c - 2 = 2(c - 1) + c = 2b + c$
(Alternativa E).
10. Veja a solução do problema N^o. 8 do Nível 1. **(Alternativa C).**
11. $\frac{4+6}{2} - \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 5 - \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 5 - \frac{2}{\frac{5}{12}} = 5 - \frac{24}{5} = 5 - 4,8 = 0,2$ **(Alternativa B).**

12. Veja a solução do problema N^o. 18 do Nível 1. **(Alternativa D).**
13. Existem 9 peças com duplos (0 - 0, 1 - 1, ..., 8 - 8) e $9 \times 8/2 = 36$ peças com números diferentes. **(Alternativa E).**
14. Os seis primeiros termos são:
 $3^2 - 4 = 5$ (primo)
 $4^2 - 5 = 11$ (primo)
 $5^2 - 6 = 19$ (primo)
 $6^2 - 7 = 29$ (primo)
 $7^2 - 8 = 41$ (primo)
e $8^2 - 9 = 55 = 5 \times 11$. **(Alternativa C).**

Outra solução:

O n -ésimo termo da seqüência é

$$a_n = (n+2)^2 - (n+3) = n^2 + 3n + 1 = \frac{1}{4}(4n^2 + 12n + 4) = \frac{1}{4}((2n+3)^2 - 5)$$

Seja p um divisor primo de $n^2 + 3n + 1$.

Como $n^2 + 3n + 1 = n(n+1) + 2n + 1$ é ímpar, $p \neq 2$.

Assim, $p \mid \frac{1}{4}((2n+3)^2 - 5) \Leftrightarrow (2n+3)^2 \equiv 5 \pmod{p}$. Portanto 5 deve ser resíduo quadrático módulo p .

Logo os menores valores de p são 5 e 11, de modo que se a_n é composto $a_n \geq 5 \times 11$. (Observe que a_n não é um quadrado perfeito, pois $(2n+2)^2 < 4a_n < (2n+3)^2$). Como $(n+2)^2 - (n+3) = 55 \Leftrightarrow n = 6$, o primeiro termo composto é o sexto.

Observação: Na verdade, utilizando a lei da reciprocidade quadrática, temos

$$\left(\frac{p}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{5-1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{p}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 0, 1 \text{ ou } 4 \pmod{5}.$$

Para saber o que é lei da reciprocidade quadrática e o símbolo $\left(\frac{p}{q}\right)$ (que não é p dividido por $q!$), veja:

<http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/papers/merseenne/node15.html>

e <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticReciprocityTheorem.html>

15. Se KAB significa sim, a resposta correta à pergunta é sim, ou seja, KAB . Se KAB significa não, a resposta correta à pergunta é não, ou seja, KAB . Assim, a pessoa diz a verdade nos dois casos, mas não podemos deduzir o significado verdadeiro da palavra KAB . **(Alternativa D).**

16. Veja a solução do problema N^o. 13 do Nível 1. **(Alternativa B).**

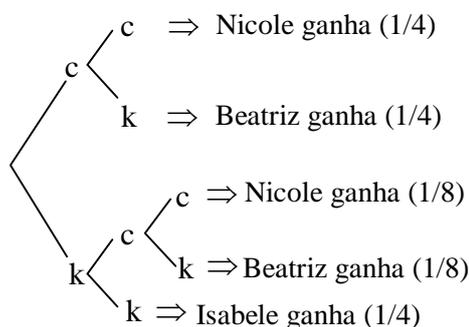
17. Veja a solução do problema N^o. 11 do Nível 1. **(Alternativa C).**

$$\mathbf{18.} \frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} = \frac{2^{2003} \cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot (3^2)^{1001}}{(2^2)^{1001} \cdot 3^{2003}} = \frac{2^{2003} \cdot 3^{2002}}{2^{2002} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 3^{2002}}{2^{2002} \cdot 3^{2003}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

(Alternativa C).

19. $11^2 < 5^3 < 2^7 \Rightarrow (11^2)^{100} < (5^3)^{100} < (2^7)^{100}$ **(Alternativa C).**

20. Vamos construir a árvore de possibilidades (Cara - C, Coroa - K)



Assim, as chances das jogadoras são as seguintes: Beatriz (3/8), Nicole (3/8), Isabele (1/4). **(Alternativa B).**

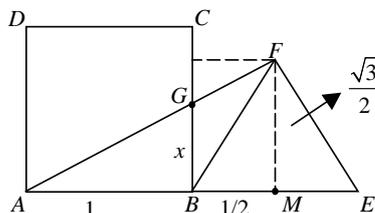
21. Veja a solução do problema N^o. 19 do Nível 1. **(Alternativa B).**

22. Como A e B são consecutivos e $AB = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = (11 \times 13) \times (14 \times 15) \times 17$ é próximo de $12^2 \times 15^2 \times 4^2 = 720^2$, A e B são próximos de 720.

Notando que $720 = 12^2 \times 5$ é próximo de $13 \times 11 \times 5$, vemos que $A = 13 \times 11 \times 5 = 715$ e $B = 2 \times 3 \times 7 \times 17 = 714$.

A soma dos algarismos de A é $7 + 1 + 5 = 13$. **(Alternativa C).**

23.



$$\frac{ABG}{1} = \frac{AMF}{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ A área do } \triangle BFG \text{ é então } \frac{BG \times BM}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

(Alternativa D).

24. A estratégia é escolher o ímpar "no meio" de cada intervalo. Pedrinho pode começar com $x = 51$, reduzindo as possibilidades a no máximo 25 ímpares (por exemplo, se a resposta for *menor*, o número será um ímpar entre 1 e 49, e nesse caso Pedrinho escolherá $x = 25$). Continuando essa estratégia, Pedrinho reduzirá as possibilidades no próximo passo a (no máximo) 12 ímpares, depois a 6 ímpares, depois a 3 ímpares e finalmente a 1 ímpar, acertando o número com no máximo 5 perguntas. **(Alternativa A).**

25. Os triângulos ABE e ACD são isósceles de bases AE e AD , respectivamente, pois $AB = BE = 20$ e $AC = CD = 21$. Se 2β e 2γ são as medidas dos ângulos internos B e C do triângulo ABC , temos $\widehat{BEA} = \widehat{BAE} = 90^\circ - \beta$ e $\widehat{CDA} = \widehat{CAD} = 90^\circ - \gamma$. Logo $\widehat{DAE} = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma$.

Como $20^2 + 21^2 = 29^2$, pela recíproca do teorema de Pitágoras, o ângulo \widehat{BAC} é reto. Logo $90^\circ + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \beta + \gamma = 45^\circ$. Portanto o ângulo \widehat{DAE} mede 45° . **(Alternativa C).**