XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3

1^a. Fase Olimpíada Regional
AL – BA – GO – PA – PB – PI – RS – RN – SC

7 de junho de 2003

- ***A duração da prova é de 3 horas.***
- ***Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.***
- ***Você pode solicitar papel para rascunho.***
- ***Entregue apenas a folha de respostas.***

1. O número 19*AB*, onde *A* e *B* são dígitos, é um quadrado perfeito. O valor de $\sqrt{AB}$ da raiz quadrada do número cuja representação decimal é *AB* é:
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

2. Considere a seqüência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... O 2003^o termo desta seqüência é:
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Camila e Lara estão disputando o seguinte jogo num tabuleiro 4 × 4: Camila marca algumas casas do tabuleiro e informa à Lara o número de casas marcadas na vizinhança de cada casa do tabuleiro. Neste jogo, duas casas distintas são consideradas vizinhas se possuem um lado ou um canto (vértice) em comum.
Lara deve descobrir quais casas foram marcadas por Camila. Após marcar algumas casas, Camila passou para Lara o seguinte tabuleiro:

1	**2**	**1**	**1**
0	**2**	**1**	**2**
2	**3**	**3**	**1**
1	**0**	**2**	**1**

O número de casas marcadas é:
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4. Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos?
(Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)
A) $35!$ B) $\frac{35!}{5!}$ C) $\frac{35!}{5}$ D) $\binom{35}{5}5!$ E) $e^{\text{®}\sqrt{163}}$

5. A Revolução Francesa, em 1789, trouxe muitas mudanças na humanidade. Em 1791, após a Revolução Francesa, a Academia Francesa de Ciências propôs um novo sistema de medidas. Esse sistema era baseado numa medida "natural" de comprimento, chamada *metro*, que foi definida como um décimo de milionésimo da distância do Pólo Norte ao Equador, medida em torno da circunferência do meridiano que passa por Paris. Tal sistema foi efetivamente adotado em 1795. A definição atual do metro é diferente mas o valor é aproximadamente o mesmo.
Considerando os fatos acima, qual é a ordem de grandeza do volume do planeta Terra, em metros cúbicos?
Obs.: Nesta questão você pode querer utilizar a fórmula do volume *V* da esfera, $V = \frac{4}{3}\text{®}R^3$, onde *R* é o raio da esfera.
A) 10^{16} B) 10^{21} C) 10^{26} D) 10^{31} E) 10^{36}

6. Na seqüência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores.
Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\frac{21}{256}+\frac{34}{512}+\frac{55}{1024}+\cdots,$$

onde o n-ésimo termo é o n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci dividido por 2^n?

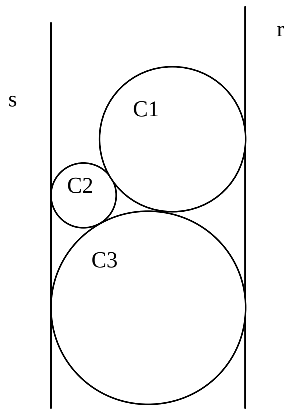
A) 3/2 B) 2 C) 5/2 D) 3 E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

7. O gráfico de $y = x^2 - 5x + 9$ é rodado 180^o em torno da origem. Qual é a equação da nova curva obtida?

A) $y = x^2 + 5x + 9$ B) $y = x^2 - 5x - 9$ C) $y = -x^2 + 5x - 9$
D) $y = -x^2 - 5x + 9$ E) $y = -x^2 - 5x - 9$

8. Um clube de tênis tem n jogadores canhotos e $2n$ jogadores destros e, ao todo, há menos do que 20 jogadores. No último campeonato interno, no qual cada jogador enfrentou cada um dos outros jogadores do clube exatamente uma vez, a razão entre o número de jogos vencidos por jogadores canhotos e o número de jogos vencidos por jogadores destros foi 3 : 4.
Qual é o valor de n?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6
E) São necessárias mais informações.

9. A figura abaixo mostra duas retas paralelas r e s. A reta r é tangente às circunferências $C1$ e $C3$, a reta s é tangente às circunferências $C2$ e $C3$ e as circunferências tocam-se como também mostra a figura.



As circunferências $C1$ e $C2$ têm raios a e b, respectivamente.
Qual é o raio da circunferência $C3$?

A) $2\sqrt{a^2+b^2}$ B) $a + b$ C) $2\sqrt{ab}$ D) $\frac{4ab}{a+b}$ E) $2b - a$

10. A seqüência "22" descreve a si mesma, pois ela é formada por exatamente dois 2.
Analogamente, a seqüência "31 12 33 15" descreve a si mesma, pois é formada por exatamente três 1, um 2, três 3 e um 5. Qual das seguintes seqüências *não* descreve a si mesma?
A) 21 32 23 16 B) 31 12 33 18 C) 31 22 33 17 19
D) 21 32 33 24 15 E) 41 32 23 24 15 16 18

11. A função f é definida para todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:

$f(x; x) = x$, $f(x; y) = f(y; x)$, $(x + y)f(x; y) = (2x + y)f(x; x + y)$.

Qual é o valor de $f(21; 12)$?

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{11}{6}$ D) $\frac{6}{11}$ E) $\frac{1}{2003}$

12. Os quadrados dos números naturais maiores do que 2, subtraídos de seus sucessores, formam a seqüência 5, 11, 19, ... O primeiro elemento dessa seqüência que não é um número primo é o:

A) quarto B) décimo C) sexto D) nono E) sétimo

13. Você está em um país estrangeiro, a LUCIÂNIA, e não conhece o idioma, o LUCIANÊS, mas sabe que as palavras "BAK" e "KAB" significam *sim* e *não*, porém não sabe qual é qual. Você encontra uma pessoa que entende português e pergunta: "KAB significa *sim*?" A pessoa responde "KAB". Pode-se deduzir que:

A) KAB significa *sim*.
B) KAB significa *não*.
C) A pessoa que respondeu mentiu.
D) A pessoa que respondeu disse a verdade.
E) Não é possível determinar sem um dicionário LUCIANÊS-PORTUGUÊS

14. Beatriz, Isabele e Nicole estão disputando um jogo fazendo lançamentos sucessivos com uma moeda. Beatriz ganha se, em dois lançamentos consecutivos, o primeiro resultar cara e o segundo coroa. Isabele ganha se forem obtidas duas coroas em dois lançamentos consecutivos, e Nicole ganha se forem obtidas duas caras em dois lançamentos consecutivos. Elas fazem os lançamentos até que uma das jogadoras seja vencedora. Qual(is) jogadora(s) possuem menos chances de ganhar o jogo?

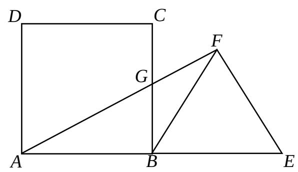
A) Beatriz
B) Isabele
C) Nicole
D) Beatriz e Nicole
E) As três têm a mesma chance.

15. Divida os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 em dois grupos x e y com produtos A e B, respectivamente, de modo que $A - B = 1$.

A soma dos algarismos de A é:

A) 10 B) 11 C) 13 D) 14 E) 15

16. A figura a seguir mostra um quadrado $ABCD$ e um triângulo eqüilátero BEF, ambos com lado de medida 1cm . Os pontos A, B e E são colineares, assim como os pontos A, G e F.



A área do triângulo BFG é, em cm^2:

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ E) $\frac{3}{10}$

17. Numa festa típica, cada prato de arroz foi servido para duas pessoas, cada prato de maionese para três pessoas, cada prato de carne servia quatro pessoas e cada prato de doces dava exatamente para cinco pessoas. Foram utilizados 77 pratos e todas as pessoas se serviram de todos os pratos oferecidos. Quantas pessoas havia na festa?
A) 20 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

18. Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: “O número que você pensou é maior, menor ou igual a *x* ? ”. Note que *x* é um número que Pedrinho escolhe.
Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá ter que fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?
A) 5 B) 7 C) 15 D) 25 E) 45

19. Dois amigos, Augusto e Eduardo, atravessavam uma ponte onde passava uma linha férrea.
Quando tinham percorrido dois quintos da ponte, ouviram o barulho de um trem que se aproximava por trás deles. Apavorados, começaram a correr, cada um para o seu lado. Tiveram sorte: Augusto, que tinha voltado, conseguiu sair da ponte no exato instante em que o trem nela ia entrar. Por sua vez, Eduardo, que continuou para a frente, conseguiu sair da ponte no instante em que o trem também ia fazê-lo. Refeitos do susto, quando se encontraram, comentaram que isto só foi possível porque correram a 15 km/h e o trem estava a *x* km/h. O valor de *x* é:
A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

20. Seja *N* o menor inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de 9, 10 e 11 inteiros positivos consecutivos. A soma dos algarismos de *N* é igual a:
A) 9 B) 18 C) 22 D) 27 E) 30

21. O maior inteiro que não supera $\dfrac{3^{2003}+2^{2003}}{3^{2001}+2^{2001}}$ é igual a:
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

22. Seja *T* = (*a*, *b*, *c*) tal que existe um triângulo *ABC* cujas medidas dos lados sejam *BC* = *a*, *CA* = *b* e *AB* = *c* satisfazendo $c \geq b \geq a > 0$ e $a + b > c$. Definimos $T^2 = (a^2, b^2, c^2)$ e $\sqrt{T} = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ como sendo, respectivamente, o quadrado e a raiz quadrada do "triângulo" *T*. Considere então as afirmativas:
1) O quadrado de um triângulo equilátero é equilátero.
2) O quadrado de um triângulo retângulo não é um triângulo.
3) T^2 é um triângulo se, e somente se, *T* é acutângulo.
4) $\sqrt{T}$ sempre é um triângulo para todo *T*.
5) Todos os ângulos de $\sqrt{T}$ são agudos.

O número de afirmativas verdadeiras é:
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23. Em um quadro negro escreve-se o número 1. As únicas alterações permitidas são substituí-lo pelo seu dobro ou pelo seu quadrado. Qual é o maior número que pode ser obtido após efetuarmos 2003 alterações?
A) 2^{2003} B) 4^{2002} C) $2^{(2^{4006})}$ D) $2^{\left(2^{2003}\right)}$ E) $2^{\left(2^{2002}\right)}$

24. Se $f: \quad \to \quad$ é uma função tal que, para todo $x \in \quad$, $f(x)(f(x) - x) = 0$, então

A) *f* é a função nula.
B) *f* é a função identidade, ou seja, $f(x) = x$ para todo x real
C) *f* é a função nula ou a função identidade
D) Há 4 possíveis funções *f*
E) Há infinitas funções *f*

25. No triângulo *ABC*, *AB* = 20, *AC* = 21 e *BC* = 29. Os pontos *D* e *E* sobre o lado *BC* são tais que *BD* = 8 e *EC* = 9. A medida do ângulo $D\hat{A}E$, em graus, é igual a:

A) 30 B) 40 C) 45 D) 60 E) 75

GABARITO – PRIMEIRA FASE

GABARITO NÍVEL 3

1) B	6) B	11) D	16) D	21) D
2) C	7) E	12) C	17) D	22) E
3) B	8) C	13) D	18) A	23) E
4) C	9) C	14) B	19) D	24) E
5) B	10) D	15) C	20) B	25) C

1. Sendo n^2 representado por 19 AB temos $1900 \le n^2 < 2000 \Leftrightarrow n = 44$. Logo $n^2 = 1936$ e, portanto, $\sqrt{AB} = \sqrt{36} = 6$. **(Alternativa B).**

2. Veja a solução do problema N°. 8 do Nível 1 **(Alternativa C).**

3. Veja a solução do problema N°. 19 do Nível 1 **(Alternativa B).**

4. O número de filas nas quais Arnaldo fica na frente de seus amigos é igual ao número de filas nas quais Bernardo fica na frente de seus amigos. E o mesmo ocorre se o amigo que fica na frente é Cernaldo ou Dernaldo ou Ernaldo, respectivamente. Logo, como o número de maneiras de formar uma fila com 35 pessoas é 35!, o número de maneiras é $\frac{35!}{5}$ **(Alternativa C).**

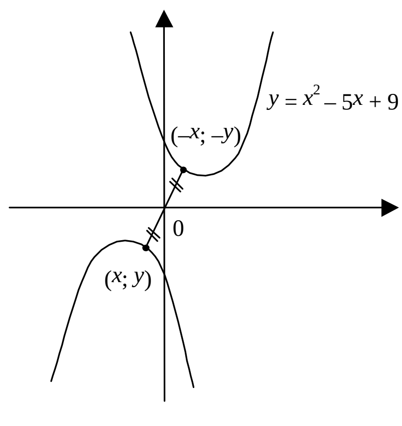
5. Considerando o planeta Terra uma esfera, seja R o seu raio, em metros. Então, como a distância do Pólo Norte ao Equador é $\frac{1}{4}$ do comprimento de uma circunferência de raio R, $\frac{2® R}{4} = 10^7 \Leftrightarrow R = \frac{2 \cdot 10^7}{®}$. Assim, o volume da Terra é:

$$\frac{4}{3}® R^3 = \frac{4}{3}®\left(\frac{2\cdot 10^7}{®}\right)^3 = \frac{32}{3\cdot ®^2}\cdot 10^{21} m^3 \cong 10^{21} m^3,\ \text{pois } ®^2 \cong 10.$$ **(Alternativa B).**

6. Temos
$$S = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\dots,$$
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\frac{3}{32}+\frac{5}{64}+\frac{8}{128}+\dots$$
$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{2}{32}+\frac{3}{64}+\frac{5}{128}+\dots.$$

Logo $S-\frac{1}{2}S-\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow S = 2$ Observação: pode-se provar que para x real, $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \dots = \frac{x}{1-x-x^2}$. **(Alternativa B).**

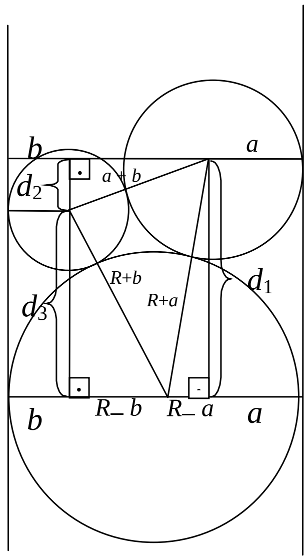
7.



Quando rodarmos um ponto (x; y) 180° em torno da origem, ele torna-se ($-x$; $-y$). Logo a equação da nova curva obtida é $(-y) = (-x)^2 - 5(-x) + 9 \Leftrightarrow y = -x^2 - 5x - 9$
(Alternativa E).

8. Como o número total de jogadores do torneio é 31, o número total de jogos é $\binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}$, que deve ser múltiplo de 3 + 4 = 7. O menor n que faz isso acontecer é n = 5, e o próximo, n = 7, já faz com que $3n = 21 > 20$. **(Alternativa C).**

9. Seja R o raio de C. Então, utilizando o teorema de Pitágoras (ver figura abaixo),



$$d_1 = d_2 + d_3 \Leftrightarrow \sqrt{(R+a)^2 - (R-a)^2} = \sqrt{(a+b)^2 - (2R-(a+b))^2} + \sqrt{(R+b)^2 - (R-b)^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{4Ra} = \sqrt{4R(a+b) - 4R^2} + \sqrt{4Rb} \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{a+b-R} + \sqrt{b} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{a+b-R} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Leftrightarrow a+b-R = a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow R = 2\sqrt{ab}.$$ **(Alternativa C).**

10. Veja a solução do problema N°. 12 do Nível 2. **(Alternativa D).**

11. Temos que $f(x; x+y) = \frac{x+y}{2x+y} \cdot f(x;y)$. Assim,

$$f(21;12) = f(12;21) = f(12;12+9) = \frac{12+9}{2\cdot 12+9} \cdot f(12;9);$$

$$f(12;9) = f(9;12) = f(9;9+3) = \frac{9+3}{2\cdot 9+3} f(9;3);$$

$$f(9;3) = f(3;9) = f(3;3+6) = \frac{3+6}{2\cdot 3+6} f(3;6);$$

$f(3;6) = f(3;3+3) = \frac{3+3}{2\cdot 3+3} f(3;3)$. Logo $f(21;12) = \frac{21}{33}\cdot\frac{12}{21}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{6}{9}\cdot f(3;3) = \frac{6}{33}\cdot 3 = \frac{6}{11}$.

Obs.: Pode-se demonstrar que $f(x;y) = \frac{2}{x+y}\cdot mdc^2(x;y)$. **(Alternativa D).**

12. Veja a solução do problema N°. 14 do Nível 2. **(Alternativa C).**
13. Veja a solução do problema N°. 15 do Nível 2. **(Alternativa D).**
14. Veja a solução do problema N°. 20 do Nível 2. **(Alternativa B).**
15. Veja a solução do problema N°. 22 do Nível 2. **(Alternativa B).**
16. Veja a solução do problema N°. 23 do Nível 2. **(Alternativa D).**
17. Veja a solução do problema N°. 12 do Nível 1. **(Alternativa D).**
18. Veja a solução do problema N°. 24 do Nível 1. **(Alternativa A).**

19. Até Augusto sair da ponte, cada um percorre $\frac{2}{5}$ do seu comprimento. Logo, enquanto o trem percorria toda a extensão da ponte, Eduardo percorria $\frac{1}{5}$ desta. Portanto, como eles correram a 15km/h, o trem estava a 5 · 15 = 75 km/h. **(Alternativa D).**

20. Das condições dadas, existem n_1, n_2, n_3 inteiros positivos tais que

$$N = (n_1 - 4) + (n_1 - 3) + (n_1 - 2) + (n_1 - 1) + n_1 + (n_1 + 1) + (n_1 + 2) + (n_1 + 3) + (n_1 + 4);$$

$$N = (n_1 - 4) + \ldots + (n_2 + 4) + (n_2 + 5);$$

$N = (n_3 - 5) + \ldots + (n_3 + 5)$, ou seja, $N = 9n_1 = 5(2n_2 + 1) = 11n_3$.

Como 9, 5 e 11 são primos entre si, N = 9 · 5 · 11 = 495, cuja soma dos algarismos é 18. **(Alternativa B).**

21. Como 3^{2003} é "bem maior" do que 2^{2003} e 3^{2001} é "bem maior" do que 2^{2001},

$$\frac{3^{2003} + 2^{2003}}{3^{2001} + 2^{2001}} \cong \frac{3^{2003}}{3^{2001}} = 9$$

Mas $9 \cdot (3^{2001} + 2^{2001}) > 9 \cdot 3^{2001} + 4 \cdot 2^{2001} = 3^{2003} + 2^{2003}$, isto é, $\frac{3^{2003} + 2^{2003}}{3^{2001} + 2^{2001}} < 9$ e, finalmente, $8 \cdot (3^{2001} + 2^{2001}) = 9 \cdot 3^{2001} + 4 \cdot 2^{2001} - 3^{2001} + 4 \cdot 2^{2001} < 3^{2003} + 2^{2003}$, isto é, $\frac{3^{2003} + 2^{2003}}{3^{2001} + 2^{2001}} > 8$. **(Alternativa D).**

22. 1. Verdadeira. Se $T = (a;\ a;\ a)$, $T^2 = (a^2;\ a^2;\ a^2)$ medidas dos lados de um triângulo equilátero.

2. Verdadeira. $T^2 = (a^2;\ b^2;\ c^2)$ com $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, não é um triângulo.

3. Verdadeira. T^2 é um triângulo se, e somente se,

$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \cos A\hat{C}B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0 \Leftrightarrow A\hat{C}B$ é agudo. Como $A\hat{C}B$ é o maior ângulo de T (oposto ao maior lado), isso equivale a ser acutângulo.

4. Verdadeira. $\sqrt{T}$ é um triângulo se, e somente se,

$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{c}\right)^2 \Leftrightarrow a + 2\sqrt{ab} + b > c.$ Porém nós sabemos que $a + b > c$ e $2\sqrt{ab} > 0$.

5. Verdadeira. $\sqrt{T}$ é um triângulo acutângulo se, e somente se, o seu maior ângulo é agudo, ou seja, o co-seno do ângulo oposto ao maior lado é positivo. Assim, $\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{a}\sqrt{b}} > 0 \Leftrightarrow a + b > c$, o que completa a nossa demonstração. **(Alternativa E).**

23. Se o número escrito é no mínimo 2, seu quadrado é maior ou igual a seu dobro. Além disso, para números inteiros positivos, quanto maior o número, maior o seu quadrado e maior o seu dobro. Assim, para obter o maior número possível, substituímos 1 pelo seu dobro 2 e, a partir daí, substituímos os números por seus quadrados, obtendo $\left(\ldots\left(\left(2^2\right)^2\right)\ldots\right)^2 = 2^{\left(2^{2002}\right)}$ **(Alternativa E).**

24. Para que a condição do enunciado seja verdadeira, basta que existam dois subconjuntos A e B de **R** com $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \varnothing$ e $f(x) = 0 (\forall x \in A)$, $f(x) = x$ $(\forall x \in B)$.

Como há infinitos pares de conjuntos (A, B) com $A \cup B = \mathbf{R}$ e $A \cap B = \varnothing$ há infinitas funções f. **(Alternativa E).**

25. Veja a solução do problema N°. 25 do Nível 2. **(Alternativa C).**