XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase - Nível 1

Instruções:
- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1
João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas.
Explique porque o resultado desta soma não pode ser igual a 1998.
Atenção: cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.

PROBLEMA 2
Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1?

PROBLEMA 3
Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

PROBLEMA 4
Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5ª. casa de João é a 12ª. de Pedro e a 5ª. casa de Pedro é a 30ª. de João. Quantas casas existem em volta da praça?

PROBLEMA 5
Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê-las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

PROBLEMA 6
Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 centímetros. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Determine:
a) o número de cubos que não possuem nenhuma face pintada de preto.
b) o número de cubos que possuem uma única face pintada de preto.
c) o número de cubos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.
d) o número de cubos que possuem três faces pintadas de preto.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMATICA
NÍVEL 1

Solução Problema 1
Como cada folha contém duas páginas tais que a soma dos seus respectivos números é ímpar, ao adicionarmos todos esses 25 números, obteremos necessariamente uma soma ímpar que, portanto, não pode ser igual a 1998.

Solução Problema 2

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}\ (*)$$

Uma vez que 60 + 30 + 20 + 10 = 120, é claro que podemos remover $\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$ e $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$. (além disso, vê-se claramente no lado direito da igualdade (*) que não existem outros termos cuja soma seja igual a $\frac{27}{120}$)

Assim, devemos remover $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$.

Solução Problema 3
Para que a diferença seja a menor possível, os números devem ser os mais próximos possíveis. Assim, os algarismos das centenas devem ser consecutivos. A melhor escolha é aquela em que as dezenas formadas pelos algarismos restantes tenham a maior diferença possível, o que ocorre para as dezenas 65 e 12. Assim, os algarismos das centenas devem ser 3 e 4. O menor número começado por 4 é 412 e o maior começado por 3 é 365, cuja diferença é 47.

Solução Problema 4
Sejam J_n e P_n respectivamente as n-ésimas casas de João e Pedro. De J_5 a J_{30} exclusive, existem 30 – 5 – 1 = 24 casas. De P_5 a P_{12} exclusive existem 12 – 5 – 1 = 6. Logo, no total existem 24 + 6 + 2 = 32 casas.

Solução Problema 5
Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo. De um modo mais geral, a estratégia ganhadora consiste em deixar o adversário com $2^k - 1$ balas, para algum $k \in$ N. O adversário é obrigado a comer de 1 a $(2^{k-1} - 1)$ balas, deixando sobre a mesa um número de balas que está sempre entre 2^{k-1} e $2^k - 2$. O primeiro jogador pode, então, jogar novamente de modo a deixar o adversário com $2^{k-1} - 1$ balas. O processo prossegue até o adversário ser reduzido a $2^1 - 1 = 1$ bala.

Solução Problema 6

a) Estão sem nenhuma face pintada, os cubos interiores ao cubo maior. Portanto devem ser retiradas uma fila de cima e uma fila de baixo, uma da frente e outra de trás, e uma de cada lado, ficando assim com um cubo de aresta 8 que contém $8^3 = 512$ cubos pequenos.

b) Estão com uma face pintada aqueles que pertencem a uma face mas não possuem lado comum com a aresta do cubo maior, isto é, $8^2 = 64$ em cada face. Como são seis faces, temos $6 \times 64 = 384$ cubos pequenos.

c) Estão com duas faces pintadas aqueles que estão ao longo de uma aresta mas não no vértice do cubo maior, isto é, 8 cubos em cada aresta. Como são 12 arestas, temos $8 \times 12 = 96$ cubos pequenos.

d) Estão com 3 faces pintadas aqueles que estão nos vértices do cubo maior, ou seja, 8 cubos pequenos.