

XXV OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1

No triângulo ABC , M é o ponto médio do lado AC , D é um ponto sobre o lado BC tal que AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e P é o ponto de interseção de AD e BM . Sabendo que a área de ABC é 100, $AB = 10$ e $AC = 30$, calcule a área do triângulo APB .

PROBLEMA 2

Dizemos que um número N de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de N , na ordem em que aparecem em N e o outro, pelos dois últimos algarismos de N , também na ordem em que aparecem em N .

Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

Observação: Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.

PROBLEMA 3

Entre 15 números reais distintos, o menor deles igual a 1, não há três que podem ser lados de um triângulo. Quais valores o maior dos 15 números pode assumir?

PROBLEMA 4

O triângulo ABC é retângulo em A . Dentre os pontos P pertencentes ao perímetro do triângulo, encontre aquele que minimiza a soma $AP + BP + CP$.

PROBLEMA 5

Um quadrado de lado 3 é dividido em 9 quadrados de lado unitário, formando um quadriculado. Cada quadrado unitário é pintado de azul ou vermelho. Cada cor tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ser escolhida e a cor de cada quadrado é escolhida independentemente das demais. Qual a probabilidade de obtermos, após colorirmos todos os quadrados unitários, um quadrado de lado 2 pintado inteiramente de uma mesma cor?

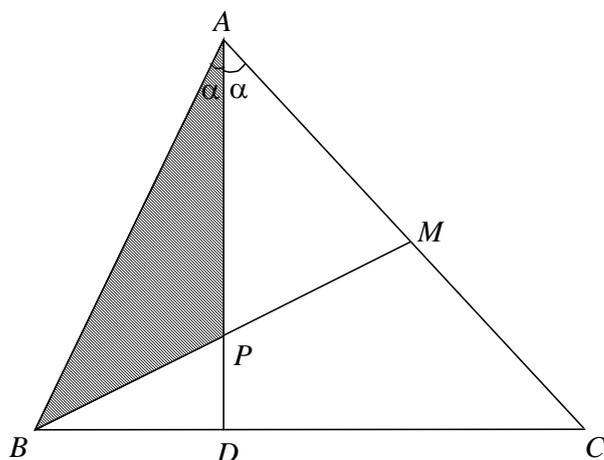
PROBLEMA 6

Calcule a soma

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = \frac{2^1}{3^1 + 1} + \frac{2^2}{3^2 + 1} + \frac{2^3}{3^4 + 1} + \frac{2^4}{3^8 + 1} + \dots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n} + 1}$$

Soluções Nível 3 – Primeira Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:



As alturas que passam por B dos triângulos ABC e ABM são iguais a distância d de B à reta AC ,

$$\text{logo } \frac{\text{área } ABM}{\text{área } ABC} = \frac{\frac{AM \cdot d}{2}}{\frac{AC \cdot d}{2}} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{área } ABM = \frac{1}{2} \text{área } ABC = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50.$$

Analogamente, $\frac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \frac{BP}{BM}$. Pelo Teorema das bissetrizes,

$$\frac{BP}{PM} = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{30} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{3}{2} BP$$

Logo

$$\frac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP + PM} = \frac{BP}{BP + \frac{3}{2}BP} = \frac{BP}{\frac{5}{2}BP} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{área } ABP = \frac{2}{5} \text{área } ABM = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20.$$

SEGUNDA SOLUÇÃO:

Seja $2r = \angle BAC$. Temos

$$\frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen} 2r}{2} = \text{área } ABC \Leftrightarrow \frac{10 \cdot 30 \cdot \text{sen} 2r}{2} = 100$$

$$\Leftrightarrow \text{sen} 2r = \frac{2}{3}$$

Além disso,

$$\text{área } ABP + \text{área } PAM = \text{área } ABM$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB \cdot AP \cdot \text{sen} r}{2} + \frac{AP \cdot AM \cdot \text{sen} r}{2} = \frac{AB \cdot AM \cdot \text{sen} 2r}{2}$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot \text{sen} r (AB + AM) = AB \cdot AM \cdot \text{sen} 2r$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot \text{sen} r \left(10 + \frac{30}{2} \right) = 10 \cdot \frac{30}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot \text{sen} r = 4$$

$$\text{Logo } \text{área } \text{área } ABP = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20.$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:**Primeira Solução:**

- Calcular a área de ABM [4 pontos]
- Obteve $\frac{BP}{BM} = \frac{2}{5}$ ou equivalente $\left(\frac{BP}{PM} \text{ ou } \frac{PM}{BP} \text{ ou } \frac{BM}{BP}, \text{ etc} \right)$ [3 pontos]
- Concluiu: [3 pontos]

Segunda Solução:

- Calculou $\sin 2r$ [3 pontos]
- Obteve $AP \cdot \sin r$ [5 pontos]
- Concluiu [2 pontos]

Atenção: não somar as pontuações dos dois critérios!

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Veja a solução e o critério de correção do problema 6 do Nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Sejam a, b, c reais positivos tais que $a \leq b \leq c$. Esses números são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se, $c < a + b$. Ou seja, não são se, e somente se, $c \geq a + b$.

Assim, sendo $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{15}$ os números dados, devemos ter:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 \geq x_2 + x_1 \\ x_4 \geq x_3 + x_2 \\ \vdots \\ x_{15} \geq x_{14} + x_{13} \end{array} \right.$$

De fato, esse sistema de desigualdade equivale a não haver três que podem ser lado de um triângulo. Observe que se, $i < j < k$, $x_k < x_j + x_i$, então $x_k < x_{k-1} + x_{k-2}$.

Considere a seqüência de Fibonacci ($F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0$),

$$x_3 \geq x_2 + x_1;$$

$$x_4 \geq x_3 + x_2 \geq x_2 + x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1;$$

$$x_5 \geq x_4 + x_3 \geq 2x_2 + x_1 + x_2 + x_1 = 3x_2 + 2x_1;$$

$$x_6 \geq x_5 + x_4 \geq 3x_2 + 2x_1 + 2x_2 + x_1 = 5x_2 + 3x_1;$$

parece que $x_n \geq F_{n-1}x_2 + F_{n-2}x_1$ e, com efeito,

$$x_{k+2} \geq x_{k+1} + x_k \geq F_k \cdot x_2 + F_{k-1} \cdot x_1 + F_{k-1} \cdot x_2 + F_{k-2} \cdot x_1 = \\ F_{k+1} \cdot x_2 + F_k \cdot x_1$$

Portanto, sendo $x_2 = 1 + \langle, \langle > 0$,

$$x_{15} \geq F_{14} \cdot x_2 + F_{13} \cdot x_1 = 377 \cdot (1 + \langle) + 233 \cdot 1 = 610 + 377\langle.$$

Como podemos tornar \langle tão pequeno quanto queiramos, o maior dos 15 números pode assumir qualquer valor real maior do que 610.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Escrever que as medidas $a < b < c$ não podem ser lados de um triângulo se, e somente se, $c \geq a + b$. **2 pontos.**
- Escrever o sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x_3 \geq x_2 + x_1 \\ x_4 \geq x_3 + x_2 \\ \vdots \\ x_{15} \geq x_{14} + x_{13} \end{cases}$$
 1 ponto.
- Observar que esse sistema equivale às condições dadas no problema, ou seja, não é necessário considerar outras desigualdades. **2 pontos.**
- A partir de $x_n \geq F_{n-1} \cdot x_2 + F_{n-2} \cdot x_1$ ou $x_n > F_n$ ou estimando os termos até x_{15} , provar que $x_{15} > 610$. **3 pontos.**
- Verificar que, realmente, para todo $x_{15} > 610$ é possível construir tal seqüência de números. **2 pontos.**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Sejam a, b, c as medidas dos segmentos BC, AC e AB , respectivamente.

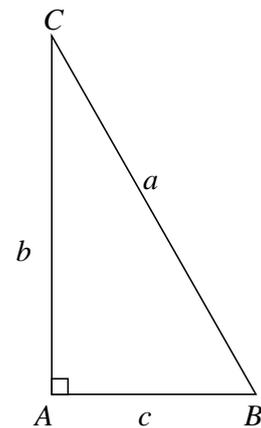
Consideraremos separadamente os casos em que P está em AC , em AB e em BC .

Se P está em AC , então $AP + CP = b$. Então, minimizar $AP + BP + CP$ reduz-se a minimizar BP . Isso ocorre quando P coincide com A , pois a menor distância entre um ponto e uma reta é determinada pelo pé da perpendicular traçada a partir desse ponto.

Nesse caso o valor mínimo de $AP + BP + CP$ é $b + c$.

O caso em que P está em AB é inteiramente análogo.

Suponha, agora, que P está em BC . Então $BP + CP = a$, ou seja, minimizar $AP + BP + CP$ reduz-se a minimizar AP .



Isso ocorre quando AP é perpendicular a BC .

Essa medida está representada por d no diagrama ao lado. Nesse caso, o mínimo de $AP + BP + CP$ é $a + d$.

Assim, para completar a resolução da questão, basta comparar $a + d$ e $b + c$.

Temos, então, várias maneiras de concluir a resolução.

Uma maneira:

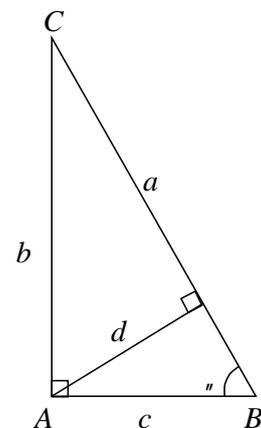
Observe que $\frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot d}{2} \Leftrightarrow bc = ad$ e $a^2 = b^2 + c^2$.

Logo

$$(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + c^2 + 2bc + d^2 = (b + c)^2 + d^2$$

e, como $d^2 > 0$, $(a + d)^2 > (b + c)^2 \Leftrightarrow a + d > b + c$.

Outra maneira: $d = c \cdot \text{sen } \theta$; $b = a \cdot \text{sen } \theta$.



Logo $(a + d) - (b + c) = a + c \cdot \text{sen } \theta - a \cdot \text{sen } \theta - c = (a - c)(1 - \text{sen } \theta) > 0$, isto é, $a + d > b + c$.

Resposta: O ponto que minimiza $AP + BP + CP$ é $P = A$ (nesse caso $AP + BP + CP = b + c$).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

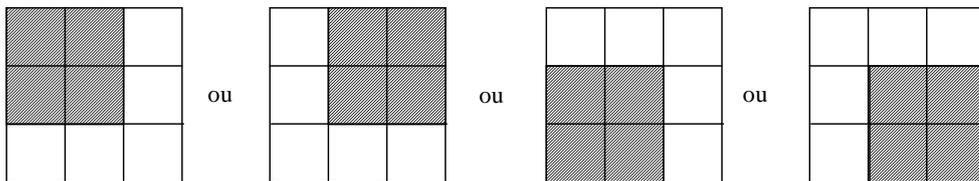
- Provar que se P está sobre AC ou AB , então devemos ter $P = A$.
- Provar que se P está sobre BC , então P deve ser a projeção de A sobre BC
- Demonstrar que $a + d > b + c$.

[2 pontos]
[2 pontos]
[Até 6 pontos]

Obs.: Caso o estudante considere pelo menos um dos seguintes fatos:
 $c = ad; d = c \cdot \text{sen } \alpha; b = a \cdot \text{sen } \alpha$, ele deve receber pelo menos 2 pontos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

O quadrado de lado 2 pode ser

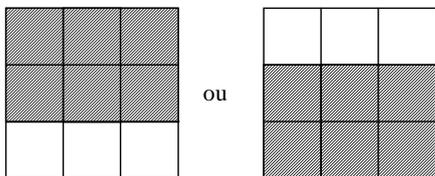
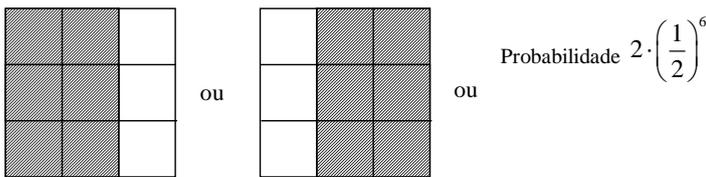
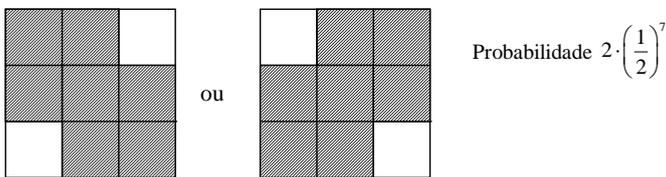


A probabilidade de cada um desses quadrados de lado 2 ser inteiramente de uma mesma cor é

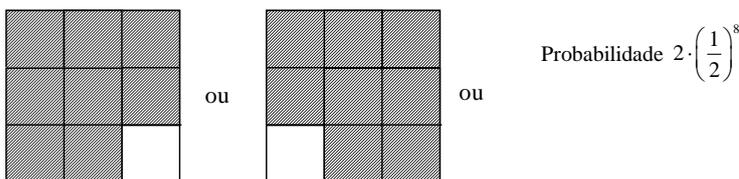
$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Observe que todos os quatro quadrados unitários devem ser da mesma cor azul ou

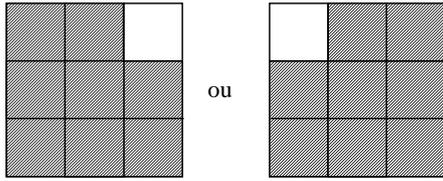
vermelho. Os demais quadradinhos podem ser de qualquer cor.

Algumas configurações são consideradas pelo menos 2 vezes:



Algumas configurações são consideradas pelo menos 3 vezes:





E as configurações com todos azuis ou todos vermelhos são contadas 4 vezes (probabilidade: $\left(\frac{1}{2}\right)^9$).

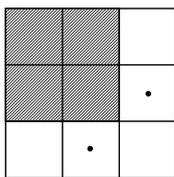
Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, a probabilidade pedida é:

$$4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{190}{512} = \frac{95}{256}.$$

Outras soluções podem envolver a seguinte divisão em casos: representando as cores possíveis por e , deixando em branco os quadradinhos em que as duas cores são permitidas.

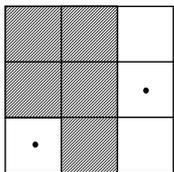
Assim os casos favoráveis são:

1) Com um único quadrado de lado 2 monocromático.

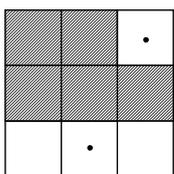


$$2 \cdot \left(\begin{array}{c} \text{shaded square} \\ \text{square with dot} \end{array} = \text{azul e} \right) \cdot 2^3 \cdot 4 = 64$$

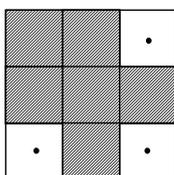
(3 brancos) (giro do tabuleiro)
ou vice-versa)



$$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$$



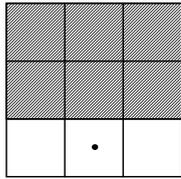
$$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$$



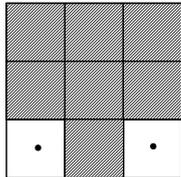
$$2 \cdot 4 = 8$$

$$64 + 32 + 32 + 8 = 136 \text{ ao todo}$$

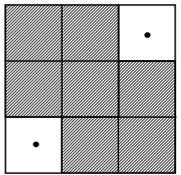
2) Com exatamente dois quadrados de lado 2 monocromáticos.



$$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$$



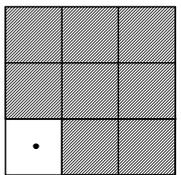
$$2 \cdot 4 = 8$$



$$2 \cdot 2 = 4 \text{ só dois giros}$$

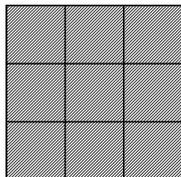
$$2 + 8 + 4 = 44 \text{ ao todo}$$

3) Com exatamente três quadrados de lado 2 monocromáticos.



$$2 \cdot 4 = 8$$

4) Com exatamente quatro quadrados de lado 2 monocromáticos.



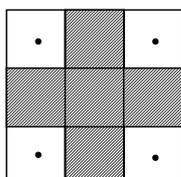
$$2$$

O total de casos favoráveis é, portanto,

$$136 + 44 + 8 + 2 = 190$$

e a probabilidade é $\frac{190}{2^9} = \frac{95}{256}$.

Contando os casos não favoráveis:



$$2$$

$$2 \cdot 2^2 \cdot 4 = 32$$

$$2 \cdot 2^4 \cdot 2 = 64$$

$$2 \cdot 2^3 \cdot 4 = 64$$

$$2 \cdot 2^4 \cdot 4 = 128$$

$$2 \cdot 2^4 = 32$$

O total de casos não fatoráveis é, portanto, $2 + 32 + 64 + 64 + 128 + 32 = 322$

E a probabilidade pedida é $1 - \frac{322}{2^9} = \frac{95}{256}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Solução via inclusão-exclusão (ou alguma idéia equivalente)

- Considerar configurações que tem pelo menos um quadrado [2 pontos]
- Subtrair aquelas que têm pelo menos 2 quadrados e, portanto, foram contadas pelo menos duas vezes. [3 pontos]
- Somar aqueles que têm pelo menos 3 quadrados e, portanto, foram contadas pelo menos 3 vezes. [3 pontos]
- Concluir [2 pontos]

Solução via obtenção direta dos casos favoráveis.

Atenção: caso o estudante tente essa abordagem e não chegue a resposta correta, sua nota não deve ultrapassar 6 pontos.

- Mostrar que existem 136 configurações com exatamente um quadrado monocromático. [4 pontos]
- Mostrar que existem 44 configurações com exatamente 2 quadrados monocromáticos. [2 pontos]
- Contar as configurações com exatamente 3 e com exatamente 4 quadrados monocromáticos. [0 (zero) pontos]

- Concluir

[4 pontos]

Solução via obtenção direta dos casos não favoráveis.

Atenção: caso o estudante tente essa abordagem e não chegue a resposta correta, sua nota não deve ultrapassar 6 pontos.

- Dividir um subcasos, levando em conta que os únicos quadrados monocromáticos possíveis têm a mesma cor da casa central. [3 pontos]
- Obter entre 200 e 250 configurações (sem repetições!) [1 ponto]
- Obter menos de 200 configurações [0 (zero) pontos]
- Obter pelo menos 250 configurações (sem repetições!) [3 pontos]

Atenção: nos três últimos critérios, os pontos não se acumulam.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Analisando casos pequenos:

$$\frac{2^1}{3^1+1} = \frac{2}{4} = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{2^1}{3^1+1}$$

$$\frac{2^1}{3^1+1} + \frac{2^2}{3^2+1} = \frac{36}{40} = 1 - \frac{4}{40} = 1 - \frac{2^2}{(3^1+1) \cdot (3^2+1)}$$

$$\frac{2^1}{3^1+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \frac{2^3}{3^4+1} = \frac{3272}{3280} = 1 - \frac{8}{3280} = 1 - \frac{2^3}{(3^1+1) \cdot (3^2+1) \cdot (3^4+1)}$$

(Observe que não compensaria simplificar as frações. Isso é comum quando queremos descobrir um padrão.)

Parece então, que podemos conjecturar que

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(3^1+1) \cdot (3^2+1)(3^4+1) \dots (3^{2^n}+1)}$$

Simplificando um pouco essa expressão antes de tentar demonstrá-la.

$$(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1) \dots (3^{2^n}+1) = \frac{(3^1-1)(3^1+1)(3^2+1)(3^4+1) \dots (3^{2^n}+1)}{3^1-1} =$$

$$\frac{(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1) \dots (3^{2^n}+1)}{2} = \frac{(3^4-1)(3^4+1) \dots (3^{2^n}+1)}{2} = \dots = \frac{3^{2^{n+1}}-1}{2}.$$

Ou seja,
$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = 1 - \frac{2^{n+1}}{3^{2^{n+1}}-1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$$

Podemos agora demonstrar nossa conjectura pelo uso direto do Princípio da Indução Finita ou considerando que, se descobrirmos $f(k)$ tal que

$$\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = f(k+1) - f(k),$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = \sum_{k=0}^n [f(k+1) - f(k)] =$$

$$f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \dots + f(n+1) - f(n) = f(n+1) - f(0)$$

(f é a "integral discreta" de $\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}$.)

Levando em conta novamente nossa conjectura, podemos inferir que

$$f(k) = -\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1} \text{ e, de fato,}$$

$$f(k+1) - f(k) = -\frac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}} - 1} + \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} - 1} = \frac{-2^{k+2} + 2^{k+1}(3^{2^k} + 1)}{(3^{2^k} + 1)(3^{2^k} - 1)} = \frac{2^{k+1}(3^{2^k} + 1 - 2)}{(3^{2^k} + 1)(3^{2^k} - 1)} = \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1}$$

Portanto

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = f(n+1) - f(0) = \frac{-2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} - 1} - \left(\frac{-2^1}{3^{2^0} - 1} \right) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} - 1}.$$

Outra maneira de concluir a resolução:

Como escrevemos anteriormente, uma vez conjecturada a expressão correta, podemos demonstrá-la pelo P.I.F.

Base de indução: Para $n = 0$.

$$\sum_{k=0}^0 \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = \frac{2^1}{3^{2^0} + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$1 - \frac{2^2}{3^{2^1} - 1} = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Passo indutivo: Supondo que

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} - 1}.$$

$$\text{Temos } \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} - 1} + \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} + 1} = 1 - 2^{n+2} \cdot \frac{(3^{2^{n+1}} + 1) - (3^{2^{n+1}} - 1)}{(3^{2^{n+1}} - 1) \cdot (3^{2^{n+1}} + 1)} = 1 - \frac{2^{n+3}}{3^{2^{n+2}} - 1}.$$

Isso completa a nossa demonstração.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Conjecturar que $\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(3^1 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \dots (3^{2^n} + 1)}$. [3 pontos]
- Conjecturar que $\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} - 1}$. [6 pontos]

Atenção: nos dois critérios acima, os pontos não se acumulam.

- Concluir, ou seja, demonstrar que $\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{3^{2^k} + 1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}} - 1}$. [4 pontos]
- Tentativas que não levam a alguma conjectura correta [0 (zero) pontos]