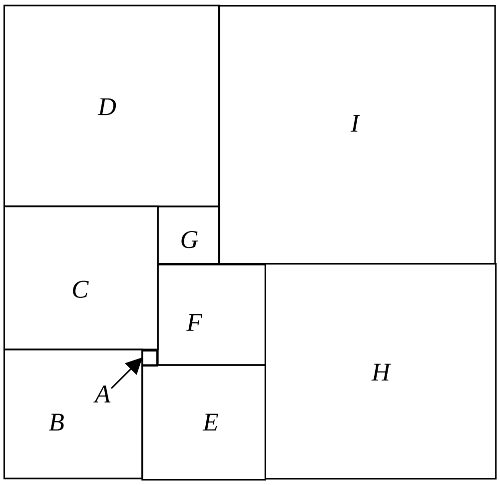
XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. e 6ª. séries)

PROBLEMA 1
De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 24 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$?
Obs: Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 4$ e $2 \times 4 \times 3$ devem ser considerados iguais.

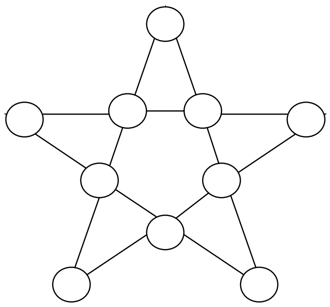
PROBLEMA 2
O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A, B, C, D, E, F, G, H* e *I.* O quadrado *A* tem lado 1 e o quadrado *B* tem lado 9.

Qual é o lado do quadrado *I*?



PROBLEMA 3
Pintamos de vermelho ou azul 100 pontos em uma reta. Se dois pontos vizinhos são vermelhos, pintamos o segmento que os une de vermelho. Se dois pontos vizinhos são azuis, pintamos o segmento de azul. Finalmente, se dois pontos vizinhos têm cores distintas, pintamos o segmento de verde. Feito isto, existem exatamente 20 segmentos verdes.
O ponto na ponta esquerda é vermelho.
É possível determinar com estes dados a cor do ponto na ponta direita?
Em caso afirmativo, qual a cor deste ponto?

PROBLEMA 4
Desejamos escrever os inteiros de 1 a 10 nas casas do desenho ao lado de tal forma que quaisquer quatro números alinhados aparecem em ordem crescente ou decrescente.



a) Mostre uma maneira de dispor os números respeitando estas condições.
b) Quais números podem aparecer nas pontas da estrela?
c) Quais números podem aparecer nas outras cinco posições?

PROBLEMA 5
Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 6
Qual é o maior inteiro positivo n tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por n são iguais?

SOLUÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL

Solução do Problema 1:

Sejam $a \le b \le c$ as dimensões do paralelepípedo. Temos que $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ e $abc = 24$. Como $abc \ge a.a.a \Leftrightarrow a^2 \le 24$, temos $a \le 2$, ou seja $a = 1$ ou $a = 2$.

Se $a = 1$, $bc = 24$. As possibilidades para b e c são $b = 1$ e $c = 24$; $b = 2$ e $c = 12$; $b = 3$ e $c = 8$; $b = 4$ e $c = 6$.

Se $a = 2$, $bc = 12$. As possibilidades para b e c com $b \ge 2$ são $b = 2$ e $c = 6$; $b = 3$ e $c = 4$.

Assim, há 6 maneiras de construirmos o paralelepípedo.

Solução do Problema 2:

O quadrado *A* medida de lado 1cm enquanto que o quadrado *B* tem medida de lado 9cm. Daí que as longitudes dos lados dos quadrados restantes são:

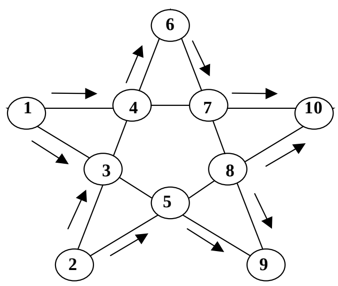
C = 10cm   *G* = 4cm.
F = 7cm   *E* = 8cm.
D = 14cm.   *I* = 18cm.

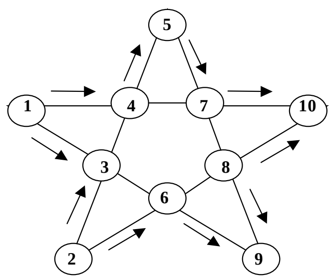
Solução do Problema 3:

Temos que os segmentos verdes dividem os pontos da reta em conjuntos de pontos com cores iguais, sendo que o primeiro conjunto à esquerda contém pontos vermelhos, o segundo conjunto contém pontos azuis, o terceiro conjunto contém pontos vermelhos, e assim por diante. Como há 20 segmentos verdes, temos 21 conjuntos de pontos.

Assim, como o 21º conjunto contém pontos vermelhos, o ponto na ponta direita é vermelho.

Solução do Problema 4:





1) **1 e 2 ocupam pontas vizinhas.** É fácil ver que colocando o 2 no meio ou em uma ponta "oposta"a 1 o problema não tem solução.

2) **9 e 10 ocupam pontas vizinhas**. Pelo mesmo raciocinio anterior.

3) Uma vez que 1 e 2 estão colocados o **3 está no meio, entre o 1 e o 2**. Observe que colocar o 3 em qualquer outra posição leva a um absurdo.

4) Uma vez que 1, 2 e 3 estão colocados, fica claro que o **4 é vizinho ao 3**.

5) Se 1, 2, 3 e 4 já estão colocados, **5 pode estar no meio ou em uma ponta, e o mesmo ocorre com o 6**. (ver figuras) Quando um deles está numa ponta, o outro está no meio.

6) **O 7 está no meio**.

Respostas:

a) Ver figuras

b) 1, 2, 9 e 10 obrigatórios mais 5 ou 6.

c) 3, 4, 7, 8 obrigatórios mais 5 ou 6.

Solução do Problema 5:

Decomponha N em primos = $2^{a_2}3^{a_3}$...
Dobro de um cubo quer dizer que todos os a_i são múltiplos de 3 exceto a_2 que deixa resto 1 na divisão por 3.
Quíntuplo de um quadrado quer dizer que todos são pares exceto a_5.
Os menores expoentes possíveis são então $a_2 = 4$; $a_5 = 3$ e os outros $a_3 = a_7 = ... = 0$.
Resposta: $N = 2^4\ 5^3 = 2000$.

Solução do Problema 6:

Dois números deixam o mesmo resto quando divididos por n se e só se sua diferença é múltipla de n. Logo, as diferenças 238 – 154 = 84 e 334 – 238 = 96 são ambas múltiplas de n. Como n é o maior possível, concluímos que n deve ser o maior divisor comum de 84 e 96, que é 12.