# XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
## Segunda Fase – Nível 2 (7ª. e 8ª. séries)

**PROBLEMA 1**

Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

**PROBLEMA 2**

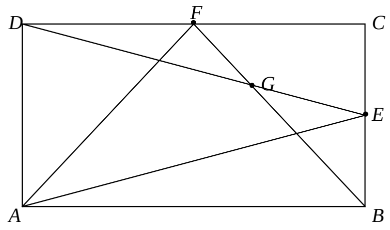
De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 216 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$?

**Obs:** Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 36$ e $2 \times 36 \times 3$ devem ser considerados iguais.

**PROBLEMA 3**

No retângulo *ABCD*, *E* é o ponto médio do lado *BC* e *F* é o ponto médio do lado *CD.* A interseção de *DE* com *FB* é *G*.

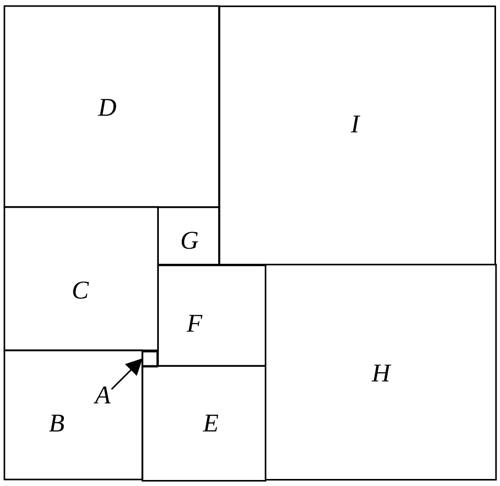
O ângulo $E\hat{A}F$ mede 20º. Quanto vale o ângulo $E\hat{G}B$ ?




**PROBLEMA 4**

O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1.

Qual é o lado do quadrado *I*?




**PROBLEMA 5**

Listamos os inteiros de 1 a *n*. Desta lista apagamos o inteiro *m*. A média dos $n - 1$ números restantes é $\frac{134}{11}$. Determine *n* e *m*.

**PROBLEMA 6**

O campeonato *Venusiano* de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o *Vulcano FC* vença todas as partidas do 1º. turno. Caso não vença o 2º. turno, o *Vulcano FC* jogará uma final contra o vencedor do 2º. turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos).

a) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **exatamente** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

b) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **pelo menos** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

# SOLUÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

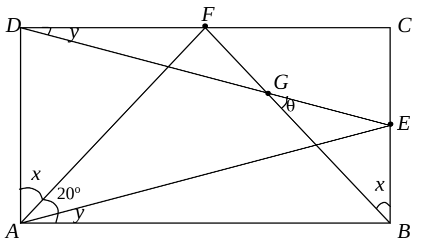
## Solução do Problema 1

Decomponha $N$ em primos = $2^{a_2}3^{a_3}\ldots$
Dobro de um cubo quer dizer que todos os $a_i$ são múltiplos de 3 exceto $a_2$ que deixa resto 1 na divisão por 3.
Quíntuplo de um quadrado quer dizer que todos são pares exceto $a_5$.
Os menores exponentes possíveis são então $a_2 = 4$; $a_5 = 3$ e os outros $a_3 = a_7 = \ldots = 0$.
Resposta: $N = 2^4\,5^3 = 2000$.

## Solução do Problema 2

Sejam $a \le b \le c$ as medidas do paralelepípedo. Temos então que $a$, $b$ e $c$ são inteiros positivos e $abc = 216$.
Como $a \cdot b \cdot c \ge a \cdot a \cdot a \Leftrightarrow a \le 6$ e $a \,|\, 216$, temos $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$ ou $a = 6$.
Se $a = 1$, temos $b \cdot c = 216$. As possibilidades neste caso são $b = 1$ e $c = 216$; $b = 2$ e $c = 108$; $b = 3$ e $c = 72$; $b = 4$ e $c = 54$; $b = 6$ e $c = 36$; $b = 8$ e $c = 27$; $b = 9$ e $c = 24$; $b = 12$ e $c = 18$.
Se $a = 2$, temos $b \cdot c = 108$, com $b \ge 2$. Temos então as possibilidades $b = 2$ e $c = 54$; $b = 3$ e $c = 36$;
$b = 4$ e $c = 27$; $b = 6$ e $c = 18$; $b = 9$ e $c = 12$.
Se $a = 3$, temos $b \cdot c = 72$, com $b \ge 3$. Temos então as possibilidades $b = 3$ e $c = 24$; $b = 4$ e $c = 18$;
$b = 6$ e $c = 12$; $b = 8$ e $c = 9$.
Se $a = 3$, temos $b \cdot c = 72$, com $b \ge 3$. Temos então as possibilidades $b = 3$ e $c = 24$; $b = 4$ e $c = 18$;
$b = 6$ e $c = 12$; $b = 8$ e $c = 9$.
Se $a = 4$, temos $b \cdot c = 54$, com $b \ge 4$. Neste caso, temos uma só solução, que é $b = 6$ e $c = 9$.
Se $a = 6$, a única solução é $b = c = 6$.
Temos, assim, 19 maneiras de construirmos o paralelepípedo.
**Observação:** pode-se verificar que o número de soluções de $b.c = r$, com $b \le c$ naturais, é $\left\lceil \frac{d(n)}{2} \right\rceil$, onde $\lceil x \rceil$ denota o menor número inteiro maior ou igual a $x$ e $d(n)$ é o número de divisores de $n$. Assim, $b \cdot c = 216$ tem $\left\lceil \frac{d(216)}{2} \right\rceil = 8$ soluções; $b \cdot c = 108$ com $b \ge 2$ tem $\left\lceil \frac{d(108)}{2} \right\rceil - 1 = 5$ soluções (descontamos aqui a solução $b = 1$ e $c = 108$); $b \cdot c = 72$ com $b \ge 3$ tem $\left\lceil \frac{d(72)}{2} \right\rceil - 2 = 4$ soluções (eliminamos $b = 5$ e $c = 72$ e $b = 2$ e $c = 36$); $b \cdot c = 54$ com $b \ge 4$ tem $\left\lceil \frac{d(54)}{2} \right\rceil - 3 = 1$ solução (eliminamos $b = 1$, $b = 2$ e $b = 3$) e $b \cdot c = 36$ com $b \ge 6$ tem $\left\lceil \frac{d(36)}{2} \right\rceil - 4 = 1$ solução (elimina-se $b$ = 1, 2 ,3 ou 4).

## Solução do Problema 3:




1) $F\hat{A}D = F\hat{B}C = x$

2) $E\hat{A}B = E\hat{D}C = y$

$\Rightarrow x + y = 70°$

$D\hat{E}C = 90° - y = \bar{\ } + x$

$90° - (x + y) = \bar{\ } \Rightarrow \bar{\ } = 20°$

## Solução do Problema 4

Seja $x$ o lado de $B$. O lado de

$C = x - 1$, $D = x + 5$, $E = x - 1$, $F = x - 2$, $G = 4$, $H = 2x - 3$,

$I = x + 9$ (=$D + G$) mas também é $3x - 9$ (=$F + H - G$).

Assim $x + 9 = 3x - 9$ e $x = 9$. Donde, o lado de $I$ é 18.

## Solução do Problema 5:

A média aritmética dos inteiros de 1 a $n$ é $(n+1)/2$. Quando se apaga um destes números, a menor média possível é a dos números de 1 a (n-1), que é n/2, e a maior é a dos números de 2 a $n$, que é $n/2 + 1$.

Logo, deve-se ter $\frac{n}{2} < 12\frac{2}{11} < \frac{n}{2} + 1$ o que fornece $22\frac{4}{11} \le n \le 24\frac{4}{11}$ e, portanto, $n$ é igual a 23 ou 24. Mas a média dos números restantes é uma fração de denominador 11. Logo, a quantidade de números que restam no quadro deve ser múltipla de 11. Portanto, $n$ só pode ser igual a 23.

Finalmente, a soma dos números que restam é 22 x 12 2/11 = 268.

A soma dos números de 1 a 23 é 23 x 12 = 276.

Logo, o número apagado foi $m = 276 - 268 = 8$.

## Solução do Problema 6:

No pior caso, o 2º. colocado do 1º. turno faz 24 pontos no 1º. turno. Se o *Vulcano FC* fizer 23 pontos no 2º. turno, ele ganhará 7 jogos e empatará 2, e o 2º. colocado no 1º. turno chegará a um máximo de 25 pontos (pois no máximo empatará com o *Vulcano FC*) no segundo turno. Assim, o *Vulcano FC* terá vantagem na decisão, nesse caso.

Note que se o *Vulcano FC* fizer 24 pontos no 2º. turno perdendo para o 2º. colocado do 1º. turno, este pode fazer 27 pontos no 2º. turno e ganhar a vantagem para a decisão.

Se o *Vulcano FC* fizer 22 pontos ou menos e o *Klingon FC* tiver feito 24 pontos no 1o. turno poderá fazer 27 pontos no 2o. turno, somando 51 pontos, mais que os 49 (ou menos) pontos do *Vulcano FC.*

Assim, a resposta da segunda pergunta é $n = 25$, enquanto a resposta da 1ª. pergunta é $n = 23$.