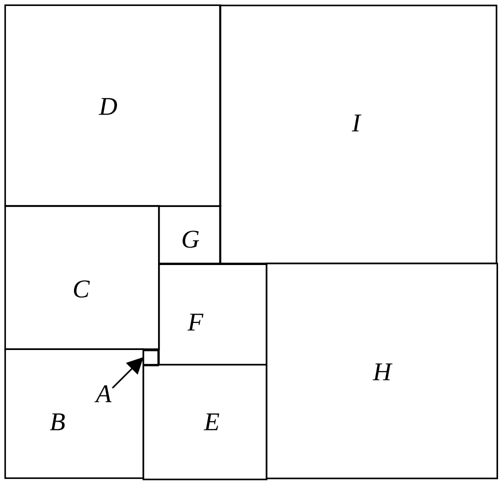
XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1
Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 2
O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1.

Qual é o lado do quadrado *I*?



PROBLEMA 3
O trapézio *ABCD* tem bases *AB* e *CD*. O lado *DA* mede *x* e o lado *BC* mede 2*x*. A soma dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ é 120°. Determine o ângulo $D\hat{A}B$.

PROBLEMA 4
O campeonato *Venusiano* de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o *Vulcano FC* vença todas as partidas do 1º. turno. Caso não vença o 2º. turno, o *Vulcano FC* jogará uma final contra o vencedor do 2º. turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos).

a) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **exatamente** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

b) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **pelo menos** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

PROBLEMA 5
O número $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\dots+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, *p* e *q* inteiros.

PROBLEMA 6
Para efetuar um sorteio entre os *n* alunos de uma escola (*n* > 1) se adota o seguinte procedimento. Os alunos são colocados em roda e inicia-se uma contagem da forma "um, DOIS, um, DOIS,...". Cada vez que se diz DOIS o aluno correspondente é eliminado e sai da roda. A contagem prossegue até que sobre um único aluno, que é o escolhido.

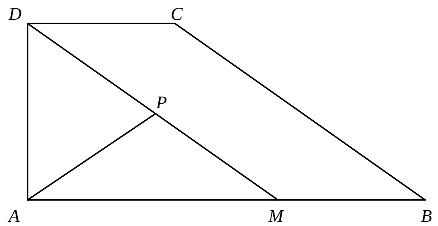
a) Para que valores de *n* o aluno escolhido é aquele por quem começou o sorteio?
b) Se há 192 alunos na roda inicial, qual é a posição na roda do aluno escolhido?

SOLUÇÕES DO TERCEIRO NÍVEL

Solução do Problema 1:
Veja Solução do problema 1 do nível 2.

Solução do Problema 2:
Veja Solução do problema 4 do nível 2.

Solução do Problema 3:
Tracemos $DM \parallel BC$ (vide figura abaixo). Como $\angle AMD = \angle ABC$ e $\angle DAM + \angle AMD = \angle DAM + \angle ABC = 120°$ tem-se que $\angle ADM = 60°$. Como $AD = x$ e $BC = 2x$, sendo P o ponto médio de DM, então, $AD = DP = x$ e ADP é um triângulo equilátero, isto é, $AP = a$. Portanto APM é um triângulo isósceles com então $\angle PAM = \angle AMP$ e como $\angle DPA$ é um ângulo externo do triângulo APM temos $60° = \angle DPA = \angle PAM + \angle AMP = 2. \angle AMP = 2. \angle ABC$. Portanto, $\angle ABC = 30°$ e $\angle DAB = 120° - \angle ABC = 90°$.



Solução do Problema 4:

Veja Solução do problema 6 do nível 2.

Solução do Problema 5:

$$S = \sum_{a=1}^{2000} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \sqrt{\frac{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1}{a^2(a+1)^2}}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + a}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \left(1 + \frac{1}{a^2 + a}\right)$$

$$= 2000 + \sum_{a=1}^{2000} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) = 2000 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}\right)$$

$$= 2000 + 1 - \frac{1}{2001}$$

$$= 2000 + \frac{2000}{2001}$$

Solução do Problema 6:

a) Para que o primeiro da fila seja o escolhido é preciso, antes de mais nada, que haja um número par de alunos (caso contrário, ele será eliminado quando começar a segunda rodada). Mais precisamente, o primeiro da fila é o escolhido se e só se, a cada rodada, a fila tem um número par de alunos. Portanto, o primeiro da fila é escolhido se e só se o número de alunos é uma potência de 2.

b) Como $192 = 2^6 . 3$, nas primeiras 6 rodadas a fila tem um número par de alunos. Após estas 6 rodadas, a fila se reduz a três alunos e é fácil verificar que o escolhido é o terceiro deles. Resta, portanto, determinar quem são os alunos que restam após as primeiras 6 rodadas. Na primeira rodada, sobrevivem 1, 5, 9, ..., 189. De um modo geral, sobrevivem à rodada de ordem n (n = 1, 2, ..., 6) os números da forma $2^n + 1$. Portanto, após 6 rodadas os sobreviventes são 1, 65 e 129 e o aluno escolhido é o de número 129.