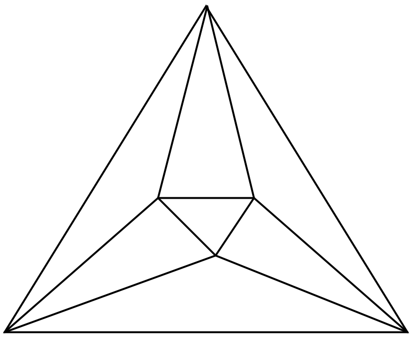
XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
Seja *ABCD* um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de *ABC*, *BCD*, *CDA* e *DAB* têm um ponto em comum se, e somente se, *ABCD* é um losango.

PROBLEMA 2:
Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

Mostramos a seguir tal divisão para $n = 7$. Observe que em cada um dos seis vértices incidem quatro segmentos.



PROBLEMA 3:
Seja $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ uma seqüência de números inteiros satisfazendo $x_{k+3} = x_{k+2} + x_{k+1}x_k$, $1 \leq k \leq 2001$.

É possível que mais da metade de seus termos sejam negativos?

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos 0, 1, 2, …, 9.

Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

PROBLEMA 5:
Considere a seqüência $(a_n)_{n \in N}$ com $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $a_n a_{n-4} = a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2}^2$.

Mostre que todos os termos dessa seqüência são números inteiros.

PROBLEMA 6:
Sejam a e b números reais. Considere a função $f_{a,b}\colon R^2 \to R^2$ definida por $f_{a,b}(x;y) = (a - by - x^2; x)$. Sendo $P = (x;y) \in R^2$, definimos $f_{a,b}^0(P) = P$ e $f_{a,b}^{k+1}(P) = f_{a,b}(f_{a,b}^k(P))$, para k inteiro não negativo.

O conjunto *per*(a; b) dos *pontos periódicos* da função $f_{a,b}$ é o conjuntos dos pontos P de R^2 para os quais existe um inteiro positivo n tal que $f_{a,b}^n(P) = P$.

Fixado o real b, prove que o conjunto $A_b = \{a \in R \mid per(a,b) \neq \emptyset\}$ tem um menor elemento. Calcule esse menor elemento.