

XXVI OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Um número natural é palíndromo quando se obtém o mesmo número ao escrevermos os seus dígitos na ordem inversa. Por exemplo, 481184, 131 e 2 são palíndromos.

Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $\underbrace{111\dots1}_m \cdot \underbrace{111\dots1}_n$ é palíndromo.

PROBLEMA 2:

Determine o menor número real C para o qual a desigualdade

$$C(x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} + x_5^{2005}) \geq x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 (x_1^{125} + x_2^{125} + x_3^{125} + x_4^{125} + x_5^{125})^{16}$$

é válida para todos os números reais positivos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

PROBLEMA 3:

Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar.

Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

PROBLEMA 5:

Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu *ponto de Fermat*, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos \widehat{AFB} , \widehat{BFC} e \widehat{CFA} medem 120 graus. Para cada um dos triângulos ABF , ACF e BCF trace a sua *reta de Euler*, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro.

Prove que essas três retas concorrem em um ponto.

PROBLEMA 6:

Dados a , c inteiros positivos e b inteiro, prove que existe x inteiro positivo tal que

$$a^x + x \equiv b \pmod{c},$$

ou seja, existe x inteiro positivo tal que c é um divisor de $a^x + x - b$.