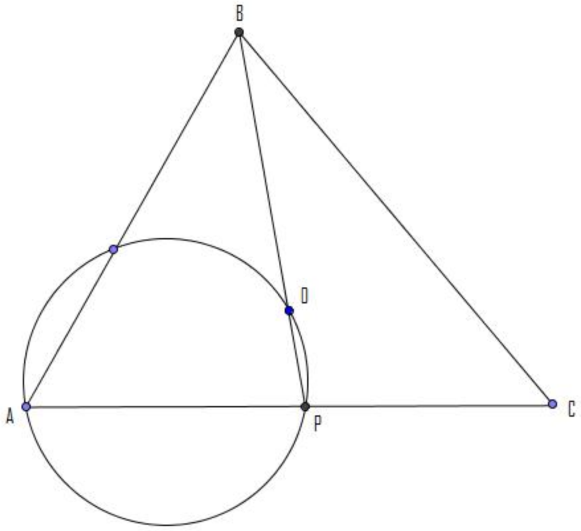
XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a intersecção das retas BO e AC e S a circunferência circunscrita a AOP. Suponha que $BO = AP$ e que a medida do arco OP em S que não contém A é 40°. Determine a medida do ângulo $\angle OBC$.

Obs: A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus vértices e seu centro é chamado de circuncentro.



PROBLEMA 2

Considere a tabela a seguir com quatro linhas (fileiras horizontais) e quatro colunas (fileiras verticais) a qual está preenchida com números naturais, ocorrendo repetições de números:

1	0	0	3
5	1	2	4
1	1	2	3
6	1	4	0

Ao somarmos cada uma de suas linhas (L1, L2, L3 e L4) e colunas (C1, C2, C3 e C4) obtemos 8 números distintos: 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13. Veja:

	C1	C2	C3	C4	*Soma da Linha*
L1	1	0	0	3	*4*
L2	5	1	2	4	*12*
L3	1	1	2	3	*7*
L4	6	1	4	0	*11*
Soma da Coluna	*13*	*3*	*8*	*10*	

Apresente, se for possível:

a) uma tabela com 4 linhas e 4 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 8.
b) uma tabela com 8 linhas e 8 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 16.
c) uma tabela com 9 linhas e 9 colunas, formada por números naturais, podendo ocorrer repetições de números, na qual apareçam como somas de linhas ou colunas os números de 1 a 18.
Atenção: caso seja impossível montar alguma tabela, você deve explicar por quê.

PROBLEMA 3

Mostre que existe um inteiro positivo *a* tal que $\frac{a^{29}-1}{a-1}$ tem pelo menos 2007 fatores primos distintos.

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Prove que não existem soluções inteiras e positivas para a equação $3^m + 3^n + 1 = t^2$.

PROBLEMA 5

Seja *ABC* um triângulo retângulo isósceles. *K* e *M* são pontos sobre hipotenusa *AB*, com *K* entre *A* e *M*, e o ângulo $\angle KCM = 45^\circ$. Prove que $AK^2 + MB^2 = KM^2$.

PROBLEMA 6

Quadradinhos iguais estão arrumados formando um tabuleiro $n \times n$. Ludmilson e Ednalva jogam o seguinte estranho jogo. Cada jogada de Ludmilson consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Ednalva consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Ludmilson e Ednalva jogam alternadamente, sendo Ludmilson o primeiro a jogar. Quando Ludmilson não puder fazer sua jogada, então Ednalva fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. Diga se é possível que Ednalva ganhe o jogo, não importando como Ludmilson jogue, em cada um dos seguintes casos:
a) $n = 10$.
b) Caso geral (*n* qualquer).