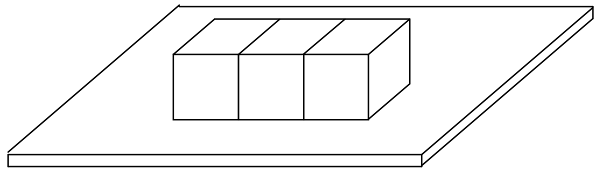
XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 2 (7a. e 8a. séries)

PROBLEMA 1:
Paulo tem três dados comuns idênticos nos quais a soma dos números em duas faces opostas é sempre igual a 7. Ele cola os dados, de modo que cada par de faces coladas tenha o mesmo número, e depois os coloca sobre uma mesa não transparente, conforme indica a figura. A soma dos números em todas as onze faces visíveis é 36. Qual é a soma dos números das três faces que estão em contato com a mesa?



PROBLEMA 2:
Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).
Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

PROBLEMA 3:
Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);
b) a seguir, dobramos o papel, ajustando-o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.

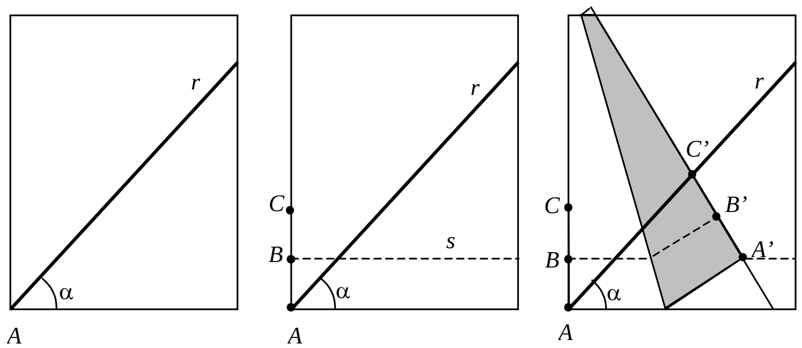


Figura 1 Figura 2 Figura 3

PROBLEMA 4:
É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SOLUÇÕES
Terceira Fase – Nível 2 (7ª. e 8ª. séries)

PROBLEMA 1:
SOLUÇÃO DE ALEX CORRÊA ABREU (NITERÓI - RJ)

Sejam a e b os números das faces coladas. Como a é o número da face oposta à face de b, no dado central, temos que $a + b = 7$.
A soma dos números das faces de cada dado é 21, então a soma dos números das faces de todos os dados é 63, mas a soma das faces coladas é $2\ (a + b) = 14$, e a soma das faces visíveis é 36, temos, então, que a soma de números das faces em contato com a mesa é: $63 – 36 – 14 = 13$.
Resposta: a soma é 13.

PROBLEMA 2:
SOLUÇÃO DE VITOR GABRIEL KLEINE (MOGI DAS CRUZES - SP)

Podemos fazer isso pegando qualquer carta de qualquer baralho, colocando sobre a mesa e vendo seu verso. Depois disso procuramos a carta de mesmo número do verso (procurando no outro baralho, já que já foi usada no primeiro baralho). Fazemos com esta carta o mesmo que foi feito com a primeira carta. Continua-se a fazer isso até fechar um ciclo (um mesmo número que já saiu em um baralho sair no outro).

baralho:	1	2	1	2	
	$\boxed{x}$	$\boxed{y}$	$\boxed{z}$	$\boxed{w}$	Ciclo fechado.
verso:	y	z	w	x	

Quando um ciclo for fechado pega-se outra carta e começa um novo ciclo. Fazendo isso até o final das cartas as faces voltadas para cima mostrarão todos os números de 1 a 100.

PROBLEMA 3:
VEJA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1 DO NÍVEL 3

PROBLEMA 4:
SOLUÇÃO DE SAMUEL BARBOSA FEITOSA (FORTALEZA - CE)

Sejam $A = 2^m$ e $A' = 2^n$ onde A' é uma reordenação dos dígitos de A, suponha sem perda de generalidade que $A > A'$, daí A é um múltiplo de A' pois possui os mesmos fatores primos. Então temos que $A = A' \cdot k$, onde $k \in Z$, $k > 1$ (pois caso não fosse $\Rightarrow$ $A' = A$, o que seria um absurdo, pois A e A' são distintos.) e k é uma potência de dois, pois A só possui fatores primos iguais a 2, daí $k = 2,4,8 \Rightarrow A = 2A'$ ou $A = 4A'$ ou $A = 8A'$.

Como a soma de seus dígitos é a mesma, A e A' deixam o mesmo resto (mod 9) e sua diferença é divisível por 9, mas $A – A'$ só pode se: A', $3A'$, $7A'$, onde nenhuma desas diferenças é divisível por 9. Daí não existem tais números. Nenhum número é divisível por 9, pois cada um desses números não possui pelo menos dois fatores primos iguais a 3.