XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

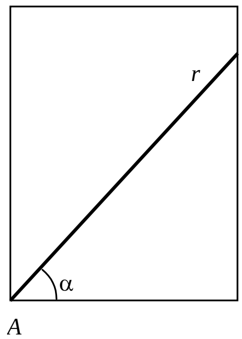
PROBLEMA 1:

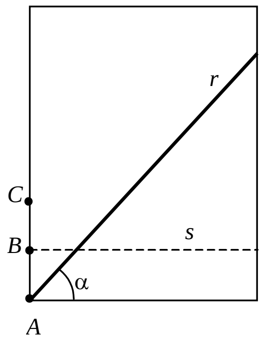
Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);

b) a seguir, dobramos o papel, ajustando-o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.





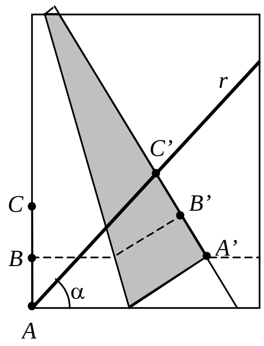


Figura 1 Figura 2 Figura 3

PROBLEMA 2:

Seja $\pm(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n, onde n é um inteiro positivo (por exemplo, $\pm(6) = 12$ e $\pm(11) = 12$). Dizemos que n é *quase perfeito* se $\pm(n) = 2n - 1$ (por exemplo, 4 é quase perfeito, pois $\pm(4) = 7$). Sejam $n \bmod k$ o resto da divisão de n por k e $s(n) = \sum_{k=1}^{n} n \bmod k$ (por exemplo: $s(6) = 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3$ e $s(11) = 0 + 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 22$).

Prove que n é quase perfeito se, e somente se, $s(n) = s(n-1)$.

PROBLEMA 3:

Seja f uma função definida nos inteiros positivos da seguinte forma:

Dado n, escrevemos $n = 2^a \cdot (2b+1)$, com a e b inteiros e definimos $f(n) = a^2 + a + 1$.

Determine o menor inteiro positivo n tal que $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \geq 123456$.

PROBLEMA 4:

A avenida Providência tem infinitos semáforos igualmente espaçados e sincronizados.

A distância entre dois semáforos consecutivos é de 1.500m. Os semáforos ficam abertos por 1 min 30s, depois fechados por 1 min, depois abertos por 1 min 30s e assim sucessivamente.

Suponha que um carro trafegue com velocidade constante igual a v, em m/s, pela avenida Providência.

Para quais valores de v é possível que o carro passe por uma quantidade arbitrariamente grande de semáforos sem parar em qualquer um deles?

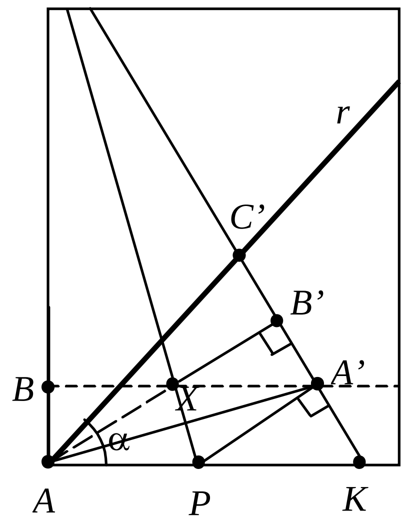
PROBLEMA 5:
Seja X o conjunto de todas as seqüências $\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$ tais que $a_i \in \{0,1,2\}$ se $1 \leq i \leq 1000$ e $a_i \in \{0,1\}$ se $1001 \leq i \leq 2000.$ Dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em X, definimos a distância $d(\underline{a}, \underline{b})$ entre a e $\underline{b}$ como sendo o número de valores de i, $1 \leq i \leq 2000,$ tais que $a_i \neq b_i$. Determine o número de funções $f : X \to X$ que preservam distância, isto é, tais que $d(f(\underline{a}), f(\underline{b})) = d(\underline{a}, \underline{b}),$ para quaisquer $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em X.

PROBLEMA 6:
Seja C um cubo de madeira. Para cada um dos 28 pares de vértices de C cortamos o cubo C pelo plano mediador dos dois vértices do par. Em quantos pedaços fica dividido o cubo?

Nota: Dados dois pontos A e B no espaço, o plano mediador de A e B é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a A e B são iguais. Em outras palavras: é o plano perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio de AB.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SOLUÇÕES
Terceira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1:
SOLUÇÃO DE MARTHA PRISCILLA ARAÚJO DE MORAES (FORTALEZA - CE)



Veja que $\overline{AP} = \overline{A'P}$, então $\Delta AA'P$ é isósceles. Seja $P\hat{A}A' = \alpha$ então $A\hat{A}'B = \alpha\,(BA' \,//\, AP)$.
Note que $\Delta APX \equiv \Delta A'PX$,
Daí:

$$X\hat{A}P = X\hat{A}'P$$
$$\alpha + X\hat{A}A' = 2\alpha$$
$$X\hat{A}A' = \alpha$$

Agora observe que:

$$B\hat{A}X = 90 - 2\alpha \rightarrow B\hat{X}A = 2\alpha$$
$$B\hat{A}X = 90 - 2\alpha \rightarrow B'\hat{X}A = 2\alpha$$

Donde segue que os pontos A, X, B' são colineares Como $CB = C'B'$, $AB = A'B'$ e $CB = AB$, temos que $C'B' = A'B'$.
Então AB' é mediana e altura do $\Delta C'AA'$, sendo, consequentemente, bissetriz do $\Delta C'AA'$.
Daí: $C'\hat{A}B' = B'\hat{A}A' = P\hat{A}A' = \alpha$.

PROBLEMA 2:
SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (FORTALEZA - CE)

Fixe *n*. Seja $a_i = n \bmod i$ e $b_i = n \bmod i$

Temos $s(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ e $s(n-1) = \sum_{i=1}^{n} b_i$

Veja que se $d \mid n$, por definição, $a_d = 0,$ e que $n \equiv 0 (\bmod d) \Rightarrow n-1 \equiv -1 (\bmod d) \Rightarrow b_d = d-1$

(já que $0 \le b_d \le d-1$) (inclusive se *d* = 1)

Além disso se $t \nmid n, a_t > 0$ e é fácil ver que $b_t = a_t - 1.$

Sendo assim:

$$s(n) = s(n-1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Leftrightarrow \sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} a_d + \sum_{t \nmid n} a_t + a_n = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} b_d + \sum_{t \nmid n} b_t \Leftrightarrow \sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} (d_d - a_d) = \sum_{t \nmid n} a_t - b_t$$

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} (d-1) = \sum_{t \nmid n} 1 \Leftrightarrow$$

Seja *f*(*n*) o número de divisores de *n*. Temos:

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} (d-1) = \sum_{t \nmid n} 1 \Leftrightarrow \sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} d - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \ne n}} 1 = \sum_{t \nmid n} 1 \Leftrightarrow (\pm(n) - n) - (f(n) - 1) = n - f(n) \Leftrightarrow \pm(n) - n - f(n) + 1 =$$

$$= n - f(n) \Leftrightarrow \pm(n) = 2n - 1.$$

De modo que $s(n) = s(n-1) \Leftrightarrow \pm(n) = 2n - 1.$

PROBLEMA 3:
SOLUÇÃO DE ULISSES MEDEIROS DE ALBUQUERQUE (FORTALEZA - CE)

Considere as representações binárias dos números, ex: 17 = (10001); 24 = (11000) e 5 = (101)

Seja *n* na base 2 igual a $(\ldots a_i \ldots a_3 a_2 a_1 a_0),$ onde $a_i = 0$ ou $a_i = 1, \forall i \in Z_+$ se $2^j > n \Rightarrow a_j = 0.$

$n = 2^a \cdot (2b+1) \Leftrightarrow a$ é a quantidade de zeros à direita na sua representação binária. Ex: $a \;\; p/o 24$ é 3, já *a* = 0 *p/* 17 e 5. Isto vem exatamente do que significa a representação de um número em uma dada base. (*)

Seja $S_k = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^k)$

Como <u>*a*</u> só depende da quantidade de zeros no final (*), temos que se $2^j > n,\ n \ge 1$ então $f(2^j + n) = f(n),$ pois terão a mesma quantidade de zeros à direita na base 2.

Assim $S_k = f(1) + f(2) + \ldots f(2^{k-1} - 1) + f(2^{k-1}) + f(2^{k-1} + 1) + f(2^{k-1} + 2) + \ldots + f(2^k)$

$S_k = (f(1) + f(2) + \ldots + f(2^{k-1} - 1) + f(2^{k-1})) + (f(1) + f(2) + \ldots + f(2^{k-1} - 1)) + f(2^k)$

$S_k = (S_{k-1}) + (S_{k-1} - f(2^{k-1}) + f(2^k)$

$S_k = S_{k-1} + S_{k-1} + \left[-(k-1)^2 - (k-1) - 1\right] + \left[k^2 + k + 1\right]$

$S_k = 2 \cdot S_{k-1} + 2 \cdot k$

$S_k = 2 \cdot (S_{k-1} + k).$

Primeiros $S_{k's}$:
$S_0 = 1$, $S_1 = 4$, $S_2 = 12$, $S_3 = 30$, $S_4 = 68$, $S_5 = 146$, $S_6 = 304$, $S_7 = 622$, $S_8 = 1260$, $S_9 = 2538$,
$S_{10} = 5096$, $S_{11} = 10214$, $S_{12} = 20452$, $S_{13} = 40930$, $S_{14} = 81888$, $S_{15} = 163806$

Seja $g(n) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, provaremos que $g(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot S_i$, onde $n = (...a_j...a_5a_4a_3a_2a_1a_0)$.

Seja j o maior possível, tal que $a_k = 1$.

$$n = 2^j + a_{j-1} \cdot 2^{j-1} + ... + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 2^0$$

$$g(n) = (f(1) + f(2) + ... + f(2^j) + (f(2^j + 1) + f(2^j + 2) + ... + f(2^j + a_{j-1} \cdot 2^{j-1} + ...a_0))$$

$$g(n) = (S_j) + f(1) + f(2) + ... + f(a_{j-1} \cdot 2^{j-1} + ... + a_0))$$

De modo análogo, tomamos o maior j_0, tal que $j > j_0$ e $a_{j_0} = 1$.

$$g(n) = S_j + (f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2^{j_0})) + (f(2^{j_0} + 1) + ... + f(2^{j_0} + a_{j_0-1} \cdot 2^{j_0-1} + ... + a_0))$$

$$g(n) = S_j + (S_{j_0}) + (f(1) + f(2) + ... + f(a_{j_0-1} \cdot 2^{j_0-1} + ... + a_0))$$

De maneira análoga, fazemos (vamos baixando) para todos os $a_{i's} = 1$.

Como $a_i = 1$ ou $a_i = 0$, podemos escrever $g(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot S_i$

Para termos o menor n, tal que $g(n) \geq 123456$

Temos que conseguir uma soma de $S_{k's} \geq 123456$, com os menores $k's$ possíveis, pois isto se refletirá em $(...a_i...a_2a_1a_0)$ com os menores $i's$ possíveis. Mas isto é uma tarefa fácil se tomarmos os $S_k's$ calculados na página seguinte e também sabendo que:

$$S_k > 2 \cdot S_{k-1} > S_{k-1} + 2S_{k-2} ... > S_{k-1} + S_{k-2} + S_{k-3} + ... + S_0$$

Daí, temos que a soma procurada é:

$$S_{14} + S_{13} + S_7 + S_2 + S_1 = 81888 + 40930 + 622 + 12 + 4 = 1234456$$

Assim, o menor n tal que $g(n) \geq 123456$ é $(110000010000110)_2$

$$n = 2^{14} + 2^{13} + 2^7 + 2^2 + 2^1 = 16384 + 8192 + 128 + 4 + 2$$

$n = 24710$

O menor inteiro positivo, tal que $f(1) + ... + f(n) \geq 123456$ é 24710.

PROBLEMA 4:
SOLUÇÃO DA BANCA

Suponha que no tempo 0 os sinais se abram e que o carro passe pela primeira vez por um sinal no tempo $t_0 \geq 0$ (mediremos o tempo sempre em segundos). Os sinais estarão abertos entre os tempos $150k$ e $150k + 90$ e fechados entre os tempos $150k + 90$ e $150(k + 1)$, para todo inteiro k. O carro passará pelos sinais nos tempos $t_0 + \frac{1500}{v}r$, para todo inteiro r_0. Assim, a condição necessária e suficiente para que o carro encontre sempre o sinal aberto é que $\frac{t_0}{150} + \frac{10}{v}r$ seja igual a um inteiro mais um número entre 0 e $\frac{3}{5}$ para todo r inteiro. Isso é claramente possível se $\frac{10}{v}$ é inteiro (com qualquer t_0 entre 0 e 90) e se $\frac{10}{v}$ é a metade de um inteiro ímpar (com qualquer t_0 entre 0 e 15).

Vamos mostrar que esses são os únicos casos possíveis.

Primeiro mostraremos que se $\frac{20}{v}$ não é igual a um inteiro mais um número pertencente a $\left(0, \frac{2}{5}\right)$: seja $\frac{10}{v} = j + \sim$, com j inteiro e $\sim \in [0,1)$. Se $0 < \sim < \frac{2}{5}$, tomamos $r_0 = 1$.

Se $\frac{1}{2} < \sim < \frac{3}{5}, 2\sim = 1 + \quad$, com $0 < \quad < \frac{1}{5}$, e tomamos $r_0 = 2$.

Se $\frac{3}{5} < \sim < 1$, tomamos $\quad = 1 - \sim$ e k inteiro tal que $k \quad < 1 < (k+1) \quad$. Como $\quad < \frac{2}{5}$, temos $k \quad > \frac{3}{5}$, e podemos tomar $r_0 = k$.

Se $\frac{2}{5} \le \sim < \frac{1}{2}$, temos $\frac{3}{5} < \frac{4}{5} \le 2\sim < 1$, e podemos proceder como no caso anterior.

Para finalizar, vamos mostrar que, nesses casos, existe k inteiro positivo tal que $\frac{t_0}{150} + \frac{10}{v}k$ é igual a um inteiro mais um elemento de $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

De fato, existe m inteiro tal que $\frac{10}{v} r_0 = m + \quad$, com $0 < \quad < \frac{2}{5}$, e existe ℓ e j inteiros com $\frac{t_0}{150} + \ell \quad < j \le \frac{t_0}{150} + (\ell + 1) \quad$, donde $\frac{t_0}{150} + \frac{10}{v}\ell r_0 = lm + \frac{t_0}{150} + \ell \quad = (\ell m + j - 1) + ¥$, onde $\frac{3}{5} < 1 - \quad < ¥ < 1$.

Assim as possíveis velocidades são $v = \frac{20}{k} m/s$, para cada inteiro positivo k.

PROBLEMA 5:
SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (SÃO PAULO - SP)

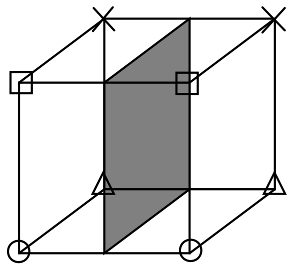
Vamos observar um caso particular primeiro:
Sabemos que:
$d(f(0,0,0,...,0), f(1,0,0,...,0)) = 1$
e $d(f(1,0,0,...,0), f(2,0,0,0,...,0)) = 1$
e $d(f(2,0,0,...,0), f(0,0,0,...,0)) = 1$
Seja $A = f(0,0,...,0), B = f(1,0,0,...,0))$
e $C = f(2,0,0,...,0)$
$A = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_{2000})$ e $C = (c_1, c_2, ..., c_{2000})$
Deve existir um único $i_1 \in N$ e $1 \le i_1 \le 2000$, tal que:
$a_{i_1} \ne b_{i_1}$, vamos provar que $i_1 \le 1000$.
Deve existir um único i_1' tal que $b_{i_1}' \ne c_{i_1}'$ e se fosse $i_1 \ne i_1'$ teríamos que $d(A,C) = 2$, um absurdo, logo $i_1 = i_1'$
Logo temos:
$A = (..., a_{i_1}, ...)$
$B = (..., b_{i_1}, ...)$ e como $a_{i_1} \ne b_{i_1} \ne c_{i_1} \ne a_{i_1}$ logo $i_1 \le 1000$.
Vamos provar que se:
$x_0 = f(0, a_2', a_3', ..., a_{2000}') = (x_1, x_2, ..., x_{2000})$ então $x_{i_1} = a_{i_1}$.

Suponhamos por absurdo que $x_{i_1} \neq a_{i_1}$ (por simetria, consideramos $x_{i_1} = b_{i_1}$)
Se $d(A; x_0) = m,$ então $d(B; x_0) = m+1,$ pois $B = f(1,0,0,0,0,...,0)$ e $A = f(0,0,0,...,0)$ $x_0 = f(0, a_1', ..., a_{2000}')$ mas $d(B, x_0) = m-1$ (pois $x_{i_1} = b_{i_1}$) que é um absurdo, logo $x_{i_1} = a_{i_1}$
Analogamente provamos que se
$x_1 = f(1, b_2', b_3', ..., b_{2000}') = (y_0, y_1, ..., y_{2000})$ então $y_{i_1} = b_{i_1}$
Vamos generalizar o argumento (nós só fizemos para o 1º. termo):

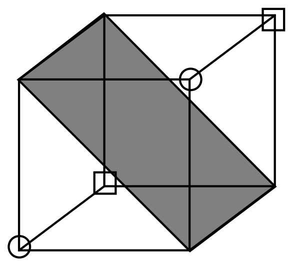
Teorema 1: Seja
$A_t = f(0,0,...,0,0,...) = (a_0, a_1, ..., a_{2000})$
$B_t = f(0,0,...,1,0,...) = (b_0, b_1, ..., b_{2000})$
$C_t = f(0,0,...,2,0,...,0) = (c_0, c_1, ..., a_{2000})$
onde $t \leq 1000.$
Então se $x' = f(x_0, x_1, ..., x_t, ...x_{2000}) = (y_0, y_1, ..., y_{2000})$ então
$y_{i_t} = a_{i_t}$ se $x_t = 0$ onde i_t é posição que muda de A_t para B_t)
$y_{i_t} = b_{i_t}$ se $x_t = 1$
$y_{i_t} = c_{i_t}$ se $x_t = 2$
Obs: é claro que $i_t \leq 1000,$ a demonstração que $i_t \leq 1000$ é análogo à de que $i_1 \leq 1000.$
Demonstração: Análoga à anterior (basta trocar algumas variáveis e copiar a demonstração anterior).
É claro que $i_1, i_2, ..., i_{1000}$ são todos distintos. Na verdade $(i_1, ..., i_{1000})$ é uma permutação de $(1,2,...,1000)$.
Consideramos agora as seguintes 2000-uplas.
$A_j = f(0,0,...,0) = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$
$B_j = f(0,0,...,1,0,0,0,...,0) = (b_1, ..., b_{2000})$ onde $j > 1000$
Sabemos que $d(A_j, B_j) = 1 \Rightarrow \exists t \in N$ tal que:
$a_t \neq b_t$ e esse t é único!
É claro que $t > 1000$ (pois se fosse t < 1000, existiria $w \leq 1000$ tal que $i_w = t,$ um absurdo, pois o valor de posição w_i da imagem é determinado exclusivamente pelo valor da posição w da 2000-upla do domínio da função t (devido ao teorema 1).
Vamos chamar esse t de i_j, assim como fizemos anteriormente.
Seja $x' = f(x_0, ..., x_j, ..., x_{2000}) = (y_0, ..., y_j, ...y_{2000})$
De forma análoga à anterior, demonstramos que:
$y_{i_j} = a_{i_j}$ se $x_j = 0$
$y_{i_j} = b_{i_j}$ se $x_j = 1$
Para contar o número de funções $f: X \to X,$ basta contar o número de permutações de $\{1,2,...,1000\}$ vezes o número de permutações de $\{1001,...,2000\} \times (3!)^{1000} \times (2!)^{1000}$ que é $1000! \times 1000! \times 12^{1000}$ pois para determinarmos uma função $f: X \to X$ basta escolher: $(i_1, ..., i_{2000})$ que é uma permutação de $(1,2,...,1000)$ e $(i_{1001}, ..., i_{2000})$ que é uma permutação de $(1001,...,2000)$ e escolher os valores apropriados de $(a_{i_t}, b_{i_t}, c_{i_t}),$ para $1 \leq t \leq 1000$ (1000 permutações de $\{0,1,2\}$) e de $(a_{i_t}, b_{i_t}),$ para $1001 \leq t \leq 2000$ (1000 permutações de $\{0, 1\}$).

PROBLEMA 6:
SOLUÇÃO DE CHRISTIAN WATANABE (ITAGUAÍ - RJ)

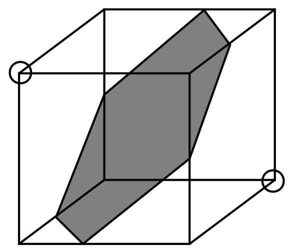
Plano mediador de dois vértices adjacentes (PMVA).



Existem 12 arestas, logo são 12 pares de vértices adjacentes, mas 4 pares possuem o mesmo plano mediador. Portanto são 12 : 4 = 3 planos.

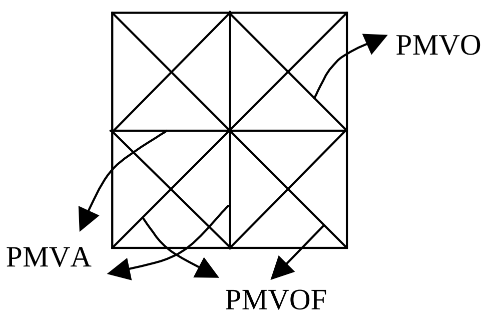


Plano mediador de dois vértices opostos de uma face (PMVOF).



Plano mediador de dois vértices opostos (PMVO).

Repare que todos os planos mediadores juntos determina em cada face a seguinte figura:



Como o centro do cubo é interseção de todos os PMs e todas as interseções entre retas da figura ao lado são extremidades das interseções entre PMs, ao ligarmos as interseções entre PMs, teremos várias pirâmides cujo vértice comum é o centro do cubo e as bases são os triângulos da face. Como são $16 \times 6 = 96$ triângulos no total, o cubo fica dividido em 96 pirâmides.