

XXV OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª ou 8ª Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Num tabuleiro 2×2 , como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$.

<i>A</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>D</i>

- a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?
- b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

PROBLEMA 2:

Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x .

PROBLEMA 3:

O triângulo ABC está inscrito na circunferência S e $AB < AC$. A reta que contém A e é perpendicular a BC encontra S em P ($P \neq A$). O ponto X situa-se sobre o segmento AC e a reta BX intersecta S em Q ($Q \neq B$).

Mostre que $BX = CX$ se, e somente se, PQ é um diâmetro de S .

XXV OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª ou 8ª Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$, quaisquer que sejam os reais x e y .

PROBLEMA 5:

São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B , C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

PROBLEMA 6:

Há N cidades na Tumbólia. Cada duas cidades desse país são ligadas por uma rodovia ou uma ferrovia, não existindo nenhum par de cidades ligadas por ambos os meios.

Um turista deseja viajar por toda a Tumbólia, visitando cada cidade exatamente uma vez, e retornar a cidade onde ele começou sua jornada.

Prove que é possível escolher a ordem na qual as cidades serão visitadas de modo que o turista mude o meio de transporte no máximo uma vez.