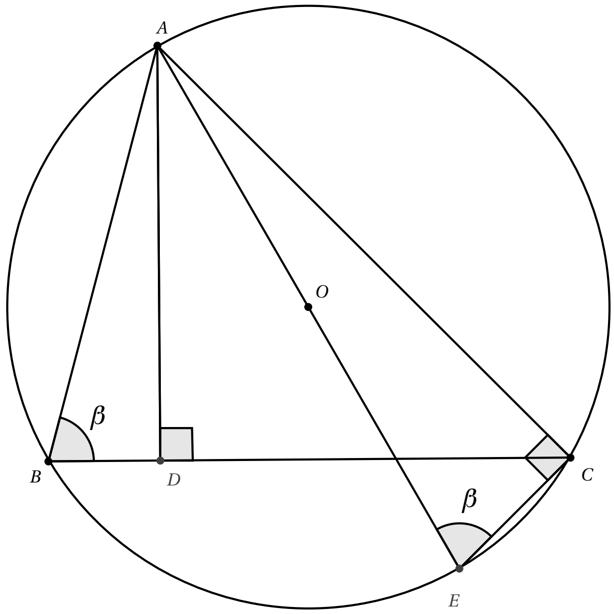
Prof. Cícero Thiago - cicerothmg@gmail.com

Ortocentro, Reta de Euler e a Circunferência dos 9 pontos

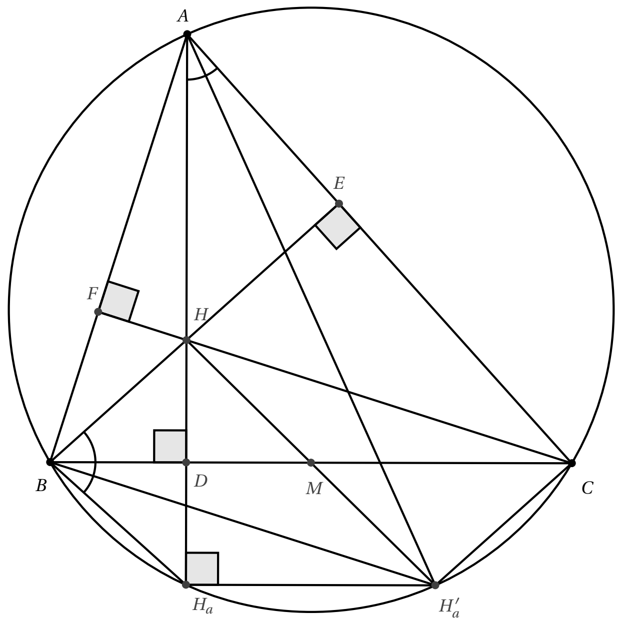
Propriedade 1**.** Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D a projeção de A sobre BC então $\angle DAB = \angle OAC$.
Demonstração.



Seja AE um diâmetro. Além disso, $\angle ABC = \angle AEC$. Portanto, $\angle BAD = \angle EAC$.

Propriedade 2**.** Seja ABC um triângulo com ortocentro H. Seja H_a o simétrico de H em relação ao lado BC e seja H'_a o simétrico de H em relação ao ponto médio de BC. Defina H_b, H'_b, H_c e H'_c analogamente. Então H_a, H'_a, H_b, H'_b, H_c e H'_c pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo ABC e AH'_a, BH'_b e CH'_c são diâmetros.
Demonstração.

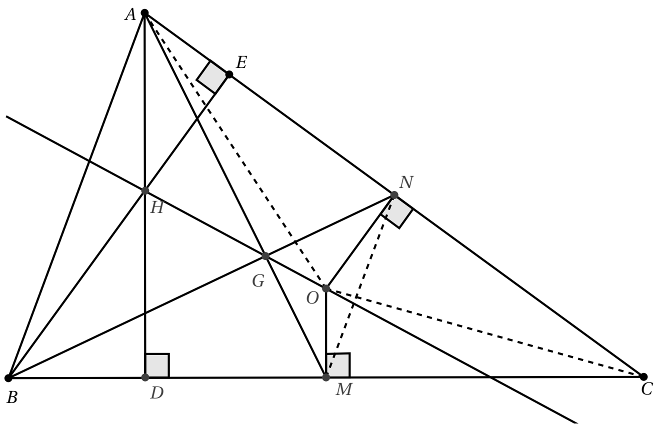
Seja H_a a intersecção da altura AD com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Temos que $\angle H_a BC = \angle H_a AC = \angle HBD$. Portanto, $\Delta HBD \equiv \Delta H_a BD$ pelo caso **ALA** e, com isso, $HD = H_a D$. Além disso, temos que $BM = CM$ e $HM = H'_a M$, em que H'_a é o simétrico de H com relação ao ponto médio M de BC, fazendo com que o quadrilátero $HBH'_a C$ seja um paralelogramo e, com isso, $\angle BHC = BH'_a C$. Mas $\angle BHC = \angle FHE = 180° - \angle A$. Portanto, o quadrilátero $ABH'_a C$ é inscritível, ou seja, H'_a pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Agora, D é ponto médio de HH_a, M é ponto médio de HH'_a e DM é base média do triângulo $HH_a H'_a$ e, com isso, $H_a H'_a \parallel DM$. Portanto, $H_a H'_a \perp AH_a$ e, dessa forma, AH'_a é um diâmetro.



Propriedade 3. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de **Reta de Euler**.

Demonstração.

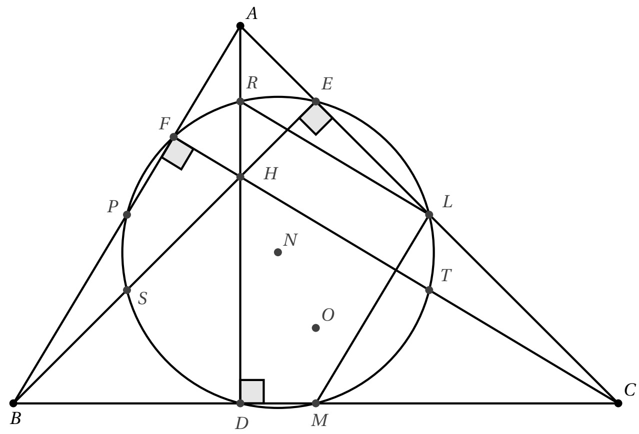
Sejam M e N os pontos médios de BC e AC, respectivamente. Então, $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$. O teorema 1 da aula 4 garante que $\angle BAD = \angle OAC$. Como O é o circuncentro então $OA = OC$ e, com isso, $\angle OAC = \angle OCA$. O quadrilátero $MCNO$ é inscritível então $\angle OCA = \angle NCO = \angle OMN$ e $\angle MON = 180° - \angle ACB$. Além disso, o quadrilátero $DCEH$ também é inscritível e, com isso, $\angle DHE = 180° - \angle ACB$. Como $\angle DHE = \angle AHB$ concluímos que o triângulo AHB é semelhante ao triângulo MNO e, com isso, $\frac{AB}{MN} = \frac{AH}{OM} = 2$. Temos que $\angle HAG = \angle GMO$ pois AH é paralelo a OM e, como G é o baricentro, $\frac{AG}{GM} = 2$. Portanto, o triângulo AHG é semelhante ao triângulo GMO e, com isso, $\angle HGA = \angle MGO$ provando então que H, G e O estão alinhados e $HG = 2GO$.



Propriedade 4. Os pés das alturas de um triângulo, os pontos médios do três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro estão sobre uma circunferência chamada **Circunferência dos**

9 **pontos**.

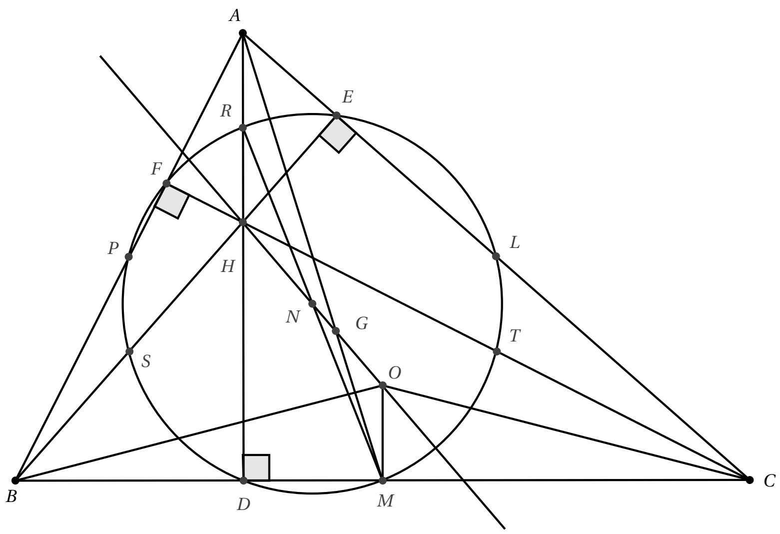
Demonstração.
Queremos provar que M, L, P, D, E, F, R, S e T são concíclicos. É suficiente provar que R e D estão sobre a circunferência circunscrita ao triângulo MLP, pois o restante é análogo. Considere a circunferência Γ de diâmetro RM. É fácil ver que D pertence a Γ. Por outro lado, $RL \parallel HC$, $LM \parallel AB$ e $HC \perp AB$, o que implica que $\angle RLM = 90°$. Portanto, L (e por simetria P) pertence a Γ.



Propriedade 5. O centro da circunferência dos 9 pontos é o ponto médio do segmento formado pelo ortocentro e pelo circuncentro.

Demonstração.

Seja RM um diâmetro da circunferência dos 9 pontos e seja N a interseção de RM e OH. Como R é ponto médio de AH então $RH = OM$. Além disso, $AH \parallel OM$. Portanto, $\Delta RHN \equiv \Delta NOM$, $RN = NM$ e $HN = ON$.



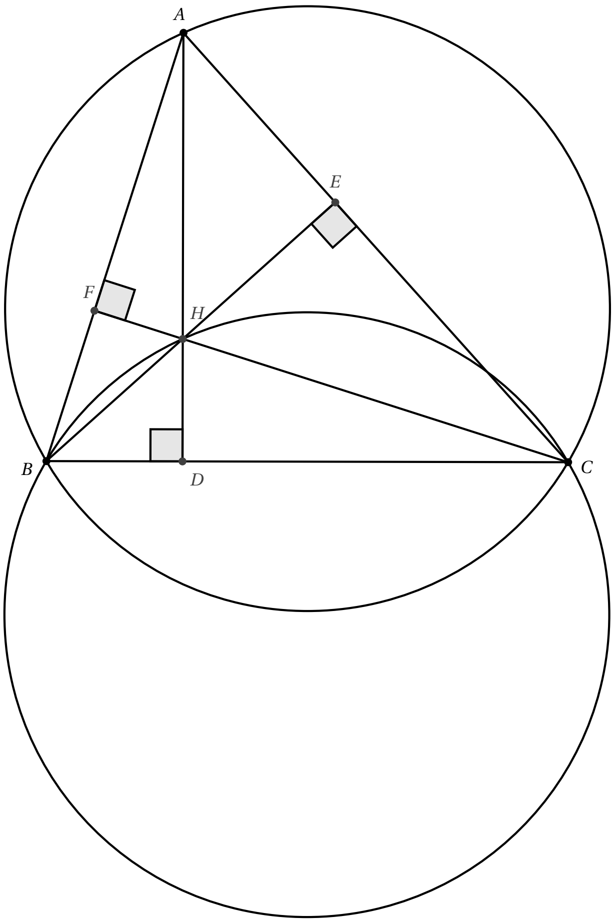
Propriedade 6. Seja ABC um triângulo e seja Γ sua circunferência circunscrita. Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos BHC, CHA e AHB possuem o mesmo raio de Γ.
Demonstração.
Seja R a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e R_1 o raio da circunferência circunscrita ao triângulo BHC. Aplicando lei dos senos nos triângulos ABC e BHC temos que:

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R,$$

e

$$\frac{BC}{\sin \angle BHC} = 2R_1.$$

Mas $\angle BHC = \angle FHE = 180^\circ - \angle A$ e $\sin(180^\circ - \angle A) = \sin \angle A$. Portanto, $2R = 2R_1 \Leftrightarrow R = R_1$.



1. (Putnam) Um retângulo $HOMF$ tem lados $HO = 11$ e $OM = 5$. Um triângulo ABC tem H como ortocentro, O como circuncentro, M o ponto médio de BC e F o pé da altura relativa ao vértice A. Determine o comprimento de BC.

2. (OCM) Seja ABC um triângulo e sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que $\angle BAC = \angle EDF$ e $\angle ACB = \angle DFE$. Mostre que o ortocentro do triângulo DEF coincide com o circuncentro do triângulo ABC.

3. (Romênia) Seja ABC um triângulo e seja H um ponto em seu interior tal que $\angle HAB = \angle HCB$ e $\angle HBC = \angle HAC$. Prove que H é o ortocentro do triângulo ABC.

4. (Teste IMO Brasil) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível e M, N os ortocentros dos triângulos ABC e ABD, respectivamente. Prove que $MNCD$ é um paralelogramo.

5. (Balcânica) Seja ABC um quadrilátero inscritível e sejam H_A, H_B, H_C e H_D os ortocentros dos triângulos BCD, CDA, DAB e ABC, respectivamente. Prove que os quadriláteros $ABCD$ e $H_AH_BH_CH_D$ são congruentes.

6. (Balcânica) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam A_1, B_1 e C_1 os pés das alturas. A circunferência inscrita no triângulo $A_1B_1C_1$ tangencia seus lados nos pontos A_2, B_2 e C_2. Prove que as retas de Euler dos triângulos ABC e $A_2B_2C_2$ coincidem.

7. (Cone Sul) Sejam H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. Seja X o ponto em que a reta HM intersecta o arco BC (que não contém A) da circunferência circunscrita a ABC. Seja Y o ponto de intersecção da reta BH com a circunferência, distinto de B. Demonstre que $XY = BC$.

8. (Turquia) Seja ABC um triângulo tal que O é seu circuncentro e H seu ortocentro. Sejam A_1, B_1 e C_1 os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. As retas HA_1, HB_1 e HC_1 intersectam a circunferência circunscrita do triângulo ABC nos pontos A_0, B_0 e C_0, respectvamente. Prove que O, H e H_0 são colineares se H_0 é o ortocentro do triângulo $A_0B_0C_0$.

9. Seja ABC um triângulo e sejam H o ortocentro e o O o circuncentro do triângulo. Se $\angle ABH = \angle HBO = \angle OBC$ e $BH = BO$ determine a medida do ângulo $\angle B$.

10. (ITA) Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $\angle BCA$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:
(a) A medida da mediana em função de l.
(b) Os ângulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$.

11. (Rússia) Seja ABC um triângulo acutângulo tal que suas alturas BB_1 e CC_1 se intersectam em H, O é seu circuncentro e A_0 é o ponto médio do lado BC. A reta AO intersecta o lado BC em P, enquanto as retas AH e B_1C_1 se intersectam em Q. Prove que as retas HA_0 e PQ são paralelas.

12. (OBM) Pode - se provar que num triângulo ABC, o triângulo DEF com D, E e F sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente com perímetro mínimo é obtido quando D, E e F são as interseções das alturas com os lados. Tal triângulo é o *triângulo órtico* de ABC. Se $AB = 13$, $BC = 14$ e $CA = 15$, o perímetro de seu triângulo órtico pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros primos entre si. Determine o valor de $a + b$.

13. (China Western) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma semicircunferência com diâmetro AB e centro O. Retas tangentes à semicircunferência nos pontos C e D se intersectam em E e as diagonais de $ABCD$ se intersectam em F. Seja M a intersecção de EF e AB. Prove que os pontos E, C, M e D são concíclicos.

14. (OBM) Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. Sejam M, N e R os pontos médios AB, BC e AH, respectivamente. Determine a medida do ângulo $\angle MNR$ se o ângulo $\angle ABC$ mede $70°$.

15. (Itália) Um triângulo ABC acutângulo está inscrito em um círculo de centro O. Seja D a interseção da bissetriz de A com BC e suponha que a perpendicular a AO por D, corta a reta AC em um ponto P, interior a AC. Mostre que $AB = AP$.

16. (USAMTS) Seja ω uma circunferência dada. Pontos A, B e C estão sobre ω de tal forma que o triângulo ABC é acutângulo. Pontos X, Y e Z estão também sobre ω de tal forma que $AX \perp BC$ em D, $BY \perp AC$ em E e $CZ \perp AB$ em F. Prove que o valor de

$$\frac{AX}{AD} + \frac{BY}{BE} + \frac{CZ}{CF}$$

não depende da escolha de A, B e C.

17. Seja ABC um triângulo acutângulo, sejam E e F os pontos de intersecção da circunferência inscrita com os lados AB e AC, respectivamente, e sejam L e M os pés das alturas relativas aos vértices B e C. Prove que o incentro I' do triângulo ALM coincide com o ortocentro H' do triângulo AEF.

18. (Sharygin) Uma reta passando pelo vértice A do triângulo ABC e paralela a BC intersecta a circunferência circunscrita de ABC pela segunda vez no ponto A_1. Os pontos B_1 e C_1 são definidos de maneira similar. Prove que as perpendiculares baixadas a partir de A_1, B_1 e C_1 sobre BC, CA e AB são concorrentes.

19. (Sharygin) Seja BB_1 e CC_1 as alturas do triângulo acutângulo ABC e A_0 o ponto médio de BC. As retas A_0B_1 e A_0C_1 intersectam uma reta passando por A e paralela a BC em P e Q. Prove que o incentro do triângulo PA_0Q está sobre a altura do triângulo ABC.

20. (Sharygin) Sejam AH_a e BH_b as alturas do triângulo ABC. Os pontos P e Q são as projeções de H_a sobre AB e AC. Prove que a reta PQ bissecta o segmento H_aH_b.

21. Seja H o ortocentro de um triângulo tal que $AH = p$, $BH = q$ e $CH = r$. Prove que $aqr + brp + cpq = abc$.

22. (Rússia) Seja ABC um triângulo e I o seu incentro. Seja A_1 o ponto médio de BC e $M_a^{'}$ o ponto médio do arco BC que contém o vértice A. Prove que $\angle IA_1B = \angle IM_a^{'}A$.

23. (Sérvia) Sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, AC e AB resptivamente, e O o circuncentro de um triângulo acutângulo ABC. Os círculos circunscritos aos triângulos BOC e MNP se intersectam em pontos distintos X e Y no interior do triângulo ABC. Prove que $\angle BAX = \angle CAY$.