XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA - ES - GO - RJ - RN - SC - SP

10 de junho de 2000

- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

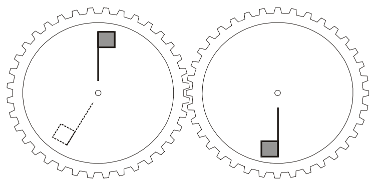
1. Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?

A) 1.000 **B)** 10.000 **C)** 50.000 **D)** 100.000 **E)** 500.000

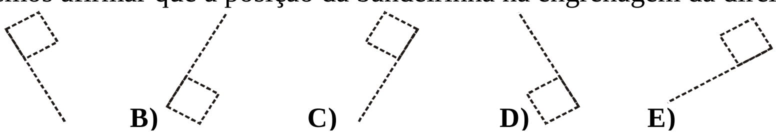
2. Uma fábrica embala latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado, de modo que cada caixa contém 8 latas. Para poderem ser melhor transportadas, essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. O número de latas de palmito em cada caixote é:

A) 576 **B)** 4.608 **C)** 2.304 **D)** 720 **E)** 144

3. Juliano colou uma bandeirinha cinza em cada engrenagem, como mostra a figura abaixo:



As engrenagens são iguais e quando a engrenagem da esquerda girou um pouco, a sua bandeirinha ficou na posição indicada com a bandeirinha branca pontilhada. Nesta condição, podemos afirmar que a posição da bandeirinha na engrenagem da direita é:



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

4. Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

– Eu não fui, diz o Benjamim.
– Foi o Carlos, diz o Mário.
– Foi o Pedro, diz o Carlos.
– O Mário não tem razão, diz o Pedro.

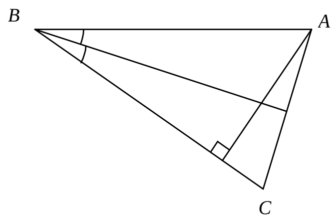
Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada do museu?

A) Mário **B)** Pedro **C)** Benjamim **D)** Carlos
E) não é possível saber, pois faltam dados

5. Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma A e os 30 seguintes na Turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da Turma A para a Turma B. Com isso:

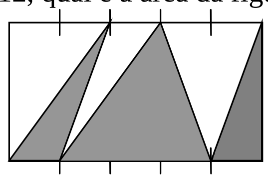
A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

6. No triângulo *ABC* representado ao lado, a medida do ângulo $\hat{C}$ é 60° e a bissetriz do ângulo $\hat{B}$ forma 70° com a altura relativa ao vértice *A*. A medida do ângulo $\hat{A}$ é:



A) 50° **B)** 30° **C)** 40° **D)** 80° **E)** 70°

7. Se a área do retângulo dado é 12, qual é a área da figura sombreada?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

8. Alberto, Beatriz e Carlos correm numa pista circular. Todos saem ao mesmo tempo e do mesmo lugar, cada um desenvolvendo velocidade constante. Alberto e Beatriz correm no mesmo sentido. Correndo no sentido oposto, Carlos encontra Alberto, pela primeira vez, exatamente 90 segundos após o início da corrida e encontra Beatriz exatamente 15 segundos depois. Quantos segundos são necessários para que Alberto ultrapasse Beatriz pela primeira vez?

A) 105 **B)** 630 **C)** 900 **D)** 1.050 **E)** não pode ser determinado

9. *DEFG* é um quadrado no exterior do pentágono regular *ABCDE*. Quanto mede o ângulo *EÂF*?

A) 9º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 18º **E)** 21º

10. Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

11. Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, …. O 100° número escrito é:

A) 406 **B)** 376 **C)** 392 **D)** 384 **E)** 400

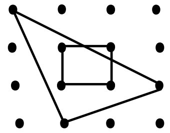
12. Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram-se ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?

A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

13. Se x e y são números reais positivos, qual dos números a seguir é o maior?

A) xy **B)** $x^2 + y^2$ **C)** $(x + y)^2$ **D)** $x^2 + y(x + y)$ **E)** $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

14. Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. A região comum ao triângulo e ao quadrado tem área:



A) $\dfrac{9}{10}$ **B)** $\dfrac{15}{16}$ **C)** $\dfrac{8}{9}$ **D)** $\dfrac{11}{12}$ **E)** $\dfrac{14}{15}$

15. Sejam a e b números reais positivos tais que $\dfrac{a}{b} < 1$. Então $\dfrac{a+1}{b+1}$

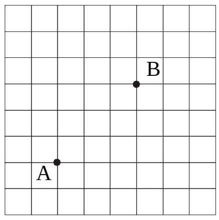
A) é igual a $\dfrac{a}{b} + 1$.   **B)** é igual a $\dfrac{a}{b}$.   **C)** é menor que $\dfrac{a}{b}$.

D) é maior que $\dfrac{a}{b}$ mas menor que 1.   **E)** pode ser maior que 1.

16. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de uma pilha que inicialmente tem 1000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?

A) 1   **B)** 2   **C)** 3   **D)** 4   **E)** 5

17. Quantos são os retângulos que têm os pontos A e B como vértices, e cujos vértices estão entre os pontos de interseção das 9 retas horizontais com as 9 retas verticais da figura abaixo?



A) 3   **B)** 4   **C)** 7   **D)** 2   **E)** 5

18. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma, num de seus escritos, que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O número de filhos do emir é:

A) 75   **B)** 48   **C)** 51   **D)** 78   **E)** 111

19. De Itacimirim a Salvador, pela estrada do Coco, são 60 km. Às 11 horas, a 15 km de Salvador, dá-se um acidente que provoca um engarrafamento, que cresce à velocidade de 4 km/h, no sentido de Itacimirim. A que horas, aproximadamente, devemos sair de Itacimirim para chegar a Salvador ao meio-dia, sabendo que viajamos a 60 km/h, exceto na zona de engarrafamento, onde a velocidade é 6 km/h?

A) 10h43min   **B)** 10h17min   **C)** 10h48min   **D)** 10h53min   **E)** 11h01min

20. Colocamos em ordem crescente os números escritos nas casas brancas do tabuleiro a seguir (estamos mostrando apenas as suas quatro primeiras linhas). Assim, por exemplo, o nono número da nossa lista é 14. Qual é o 2000º número da nossa lista?

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

… … … … … … … … …

A) 3931   **B)** 3933   **C)** 3935   **D)** 3937   **E)** 3939

GABARITO

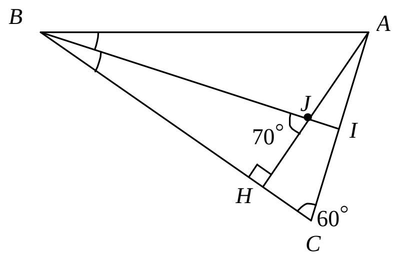
Segundo Nível (7ª. e 8ª. séries)

1) D	**6) D**	**11) E**	**16) D**
2) A	**7) D**	**12) C**	**17) E**
3) A	**8) B**	**13) C**	**18) C**
4) B	**9) A**	**14) D**	**19) A**
5) C	**10) B**	**15) D**	**20) D**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. D.-Veja a solução do problema 17 do Nível 1.
2. A.- Veja a solução do problema 11 do Nível 1.
3. A.- Veja a solução do problema 10 do Nível 1.
4. B.- Veja a solução do problema 15 do Nível 1.
5. C.- Veja a solução do problema 18 do Nível 1.

6. D.- Temos $A\hat{B}J = H\hat{B}J = 90^0 - 70^0 = 20^0$. Logo, $\hat{A} = 180^0 - (60^0 + 40^0) = 80^0$.



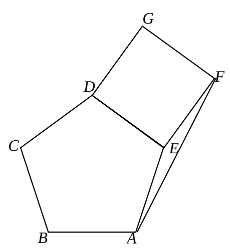
7. D.- Veja a solução do problema 6 do Nível 1.

8. B.- Sejam v_A, v_B e v_C as velocidades de Alberto, Beatriz e Carlos, respectivamente, e seja d o comprimento da pista. O tempo necessário para que Alberto alcance Beatriz é

$t = \dfrac{d}{v_A - v_B}$. Por outro lado, temos $\dfrac{d}{v_A + v_C} = 90$ e $\dfrac{d}{v_B + v_C} = 105$. Assim, $v_A + v_C = \dfrac{d}{90}$, $v_B + v_C = \dfrac{d}{105}$

e, portanto, $v_A - v_B = \dfrac{d}{90} - \dfrac{d}{105} = \dfrac{d}{630}$. Logo, o tempo pedido é $t = \dfrac{d}{\frac{d}{630}} = 630$ segundos.

9. A.-



Lembrando que o ângulo interno de um pentágono regular é igual a $\dfrac{(5-2)180^o}{5}$ = 108º, temos que $A\hat{E}F$ = 360º – 108º – 90º = 162º. Como o triângulo AEF é isósceles com $AE = EF$, temos $E\hat{A}F = \dfrac{180^o - 162^o}{2}$ = 9º

10.- B Seja $(ab)_{10}$ um inteiro de dois algarismos. Devemos ter $10a + b = 2ab \Leftrightarrow (2a - 1)(b - 5) = 5$. Como a e b são inteiros com $a > 0$ e $0 \le b \le 9$, temos que $2a - 1 > 0$ e assim, $2a - 1 = 5$ e $b - 5 = 1 \Leftrightarrow a = 3$ e $b = 6$. Logo o único inteiro satisfazendo as condições do enunciado é 36.

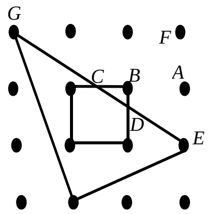
11. E.- Veja a solução do problema 19 do Nível 1.

12. C.- Existem 27 possíveis resultados para a soma dos algarismos (1 a 27). As somas 1 e 27 só podem ser obtidas de um modo cada (100 e 999, respectivamente). Assim, no caso mais desfavorável, retiraríamos 27 + 25 cartões, e uma das somas aparecerá pela terceira vez no próximo cartão. Portanto precisamos de no mínimo 53 cartões.

13. C.- Temos $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow xy \leq x^2 - xy + y^2 = \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$. Assim, como $xy > 0$,

$$xy \leq \frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2 < x^2 + y^2 < x^2 + xy + y^2 = x^2 + y(x+y) < x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

14. D.-



Temos que $\Delta ACE \sim \Delta FGE \Rightarrow \dfrac{AC}{3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow AC = \dfrac{3}{2}$. Logo $BC = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$. Temos também que $\Delta BCD \sim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{BD}{1} = \dfrac{1/2}{3/2} \Leftrightarrow BD = \dfrac{1}{3}$. Logo a área do triângulo BCD é $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$ e portanto a área desejada é $1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$.

15. D.- Como $a, b > 0$, temos $\dfrac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$. Portanto, como $a < b \Leftrightarrow a + 1 < b + 1 \Leftrightarrow \dfrac{a+1}{b+1} < 1$ e $a < b \Leftrightarrow a + ab < b + ab \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$, temos que $\dfrac{a+1}{b+1}$ é maior que $\dfrac{a}{b}$ mas menor que 1.

16. D.- Veja a solução do problema 16 do Nível 1.

17. E.- O segmento AB pode ser um dos lados do retângulo. Há 4 retângulos que podem ser construídos com essa propriedade. Se o segmento AB for uma diagonal do retângulo podemos construir apenas um retângulo, totalizando 5 possibilidades.

18. C.- Veja a solução do problema 14 do Nível 1.

19. A.- Seja t o número de horas que devemos sair antes das 11h para chegar em Salvador ao meio-dia e T o tempo passado, em horas, até entrarmos no congestionamento. Assim, antes de chegar ao congestionamento andamos $60(t + T)$ km. Em seguida, devemos passar por um congestionamento de extensão $4T$ para depois de 15 km chegarmos a Salvador. Assim, $60(t + T) + 4T + 15 = 60 \Leftrightarrow 60t + 64T = 45$.
Assim, passamos $t + T$ horas antes do congestionamento, demoramos $4T/6 = 2T/3$ horas no congestionamento e passamos mais $15/60 = 1/4$ de hora até chegarmos a Salvador. Devemos ter $1 + t = t + T + 2T/3 + 1/4 \Leftrightarrow T = 9/20$ h.
Logo $60t = 45 - 64 \cdot 9/20 = 16{,}2$ min e portanto devemos sair aproximadamente às 10h43min.

20. D.- Nas n primeiras linhas, temos $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ números, dos quais $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ estão em casas brancas. Como $\dfrac{62\cdot 63}{2} < 2000 \leq \dfrac{63\cdot 64}{2}$, temos que o 2000º número está na 63ª linha. Como $\dfrac{62\cdot 63}{2} = 1953$, concluímos que o número procurado é o (2(2000 – 1953) – 1)º = 93º número desta linha. Enfim, como o último termo da 62ª linha é $62^2 = 3844$, temos que o número procurado é 3844 + 93 = 3937.