XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3

1^a. Fase Olimpíada Regional
BA - ES - GO - RJ - RN - SC - SP

10 de junho de 2000

- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

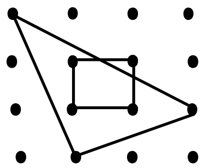
1. Se x e y são números reais positivos, qual dos números a seguir é o maior?

A) xy **B)** $x^2 + y^2$ **C)** $(x + y)^2$ **D)** $x^2 + y(x + y)$ **E)** $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

2. *DEFG* é um quadrado no exterior do pentágono regular *ABCDE*. Quanto mede o ângulo *EÂF*?

A) 9^o **B)** 12^o **C)** 15^o **D)** 18^o **E)** 21^o

3. Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. A região comum ao triângulo e ao quadrado tem área:



A) $\dfrac{9}{10}$ **B)** $\dfrac{15}{16}$ **C)** $\dfrac{8}{9}$ **D)** $\dfrac{11}{12}$ **E)** $\dfrac{14}{15}$

4. Escrevemos uma lista com todos os números inteiros de 1 a 30, inclusive. Em seguida, eliminamos alguns destes números de forma que não sobrem dois números tais que um seja o dobro do outro. Qual é a quantidade máxima de inteiros que podem permanecer na lista?

A) 15 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

5. Sejam a e b números reais positivos tais que $\dfrac{a}{b} < 1$. Então $\dfrac{a+1}{b+1}$

A) é igual a $\dfrac{a}{b} + 1$. **B)** é igual a $\dfrac{a}{b}$. **C)** é menor que $\dfrac{a}{b}$.

D) é maior que $\dfrac{a}{b}$ mas menor que 1. **E)** pode ser maior que 1.

6. Seja f uma função real que tem as seguintes propriedades:

i) Para todos x, y reais, $f(x + y) = x + f(y)$;
ii) $f(0) = 2$.

Quanto vale $f(2000)$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 1998 **D)** 2000 **E)** 2002

7. Há três cartas viradas sobre uma mesa. Sabe-se que em cada uma delas está escrito um número inteiro positivo. São dadas a Carlos, Samuel e Tomás as seguintes informações:

i) todos os números escritos nas cartas são diferentes;

ii) a soma dos números é 13;

iii) os números estão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Primeiro, Carlos olha o número na carta da esquerda e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Em seguida, Tomás olha o número na carta da direita e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Por fim, Samuel olha o número na carta do meio e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Sabendo que cada um deles sabe que os outros dois são inteligentes e escuta os comentários dos outros, qual é o número da carta do meio?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5

E) Não há informações suficientes para determinar o número.

8. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de uma pilha que inicialmente tem 1000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9. Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram-se ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?

A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

10. A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro que não supera x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos x para os quais $\left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor x^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = 10$ é:

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

11. Colocamos em ordem crescente os números escritos nas casas brancas do tabuleiro a seguir (estamos mostrando apenas as suas quatro primeiras linhas). Assim, por exemplo, o nono número da nossa lista é 14. Qual é o 2000º número da nossa lista?

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

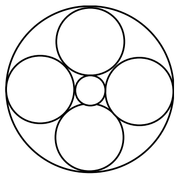
… … … … … … … … …

A) 3931 **B)** 3933 **C)** 3935 **D)** 3937 **E)** 3939

12. Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma A e os 30 seguintes na Turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da Turma A para a Turma B. Com isso:

A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

13. A figura abaixo mostra o logotipo de uma empresa, formado por dois círculos concêntricos e por quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo interno mede 1 cm. Então o raio do círculo externo deverá medir, em cm:



A) $2\sqrt{2} + 3$ **B)** $\sqrt{2} + 2$ **C)** $4\sqrt{2} + 1$ **D)** $3\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{2} + 1$

14. Alberto, Beatriz e Carlos correm numa pista circular. Todos saem ao mesmo tempo e do mesmo lugar, cada um desenvolvendo velocidade constante. Alberto e Beatriz correm no mesmo sentido. Correndo no sentido oposto, Carlos encontra Alberto, pela primeira vez, exatamente 90 segundos após o início da corrida e encontra Beatriz exatamente 15 segundos depois. Quantos segundos são necessários para que Alberto ultrapasse Beatriz pela primeira vez?

A) 105 **B)** 630 **C)** 900 **D)** 1050 **E)** não pode ser determinado

15. Quantos são os números inteiros de dois algarismos que são o dobro do produto de seus algarismos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

16. Dois nadadores, inicialmente em lados opostos de uma piscina, começam simultanea--mente a nadar um em direção ao outro. Um deles vai de um lado a outro da piscina em 45 segundos e o outro em 30 segundos. Eles nadam de um lado para outro por 12 minutos, sem perder qualquer tempo nas viradas. Quantas vezes eles passam um pelo outro (indo no mesmo sentido ou em sentidos opostos) durante este tempo, contando as vezes em que se encontram nos extremos da piscina.

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

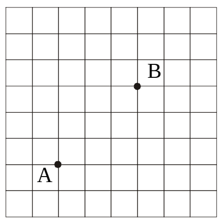
17. A soma de dois números naturais é 29. O mínimo valor para a soma de seus quadrados é:

A) 785 **B)** 733 **C)** 647 **D)** 421 **E)** 334

18. Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?

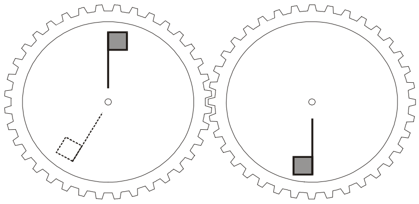
A) 1.000 **B)** 10.000 **C)** 50.000 **D)** 100.000 **E)** 500.000

19. Quantos são os retângulos que têm os pontos A e B como vértices, e cujos vértices estão entre os pontos de interseção das 9 retas horizontais com as 9 retas verticais da figura abaixo?

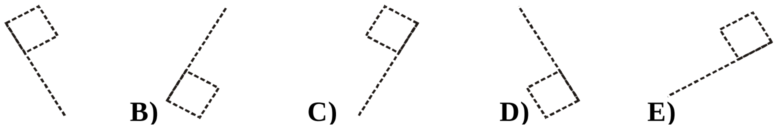


A) 3 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 5

20. Juliano colou uma bandeirinha cinza em cada engrenagem, como mostra a figura abaixo:

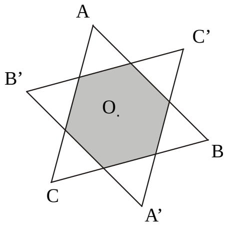


As engrenagens são iguais e quando a engrenagem da esquerda girou um pouco, a sua bandeirinha ficou na posição indicada com a bandeirinha branca pontilhada. Nesta condição, podemos afirmar que a posição da bandeirinha na engrenagem da direita é:



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

21. Na figura temos que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são equiláteros e a região destacada é um hexágono regular. A razão entre a área da região destacada e a área do triângulo *ABC* é igual a:



A) 1 **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma, num de seus escritos, que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O número de filhos do emir é:

A) 75 **B)** 48 **C)** 51 **D)** 78 **E)** 111

23. De Itacimirim a Salvador, pela estrada do Coco, são 60 km. Às 11 horas, a 15 km de Salvador, dá-se um acidente que provoca um engarrafamento, que cresce à velocidade de 4 km/h, no sentido de Itacimirim. A que horas, aproximadamente, devemos sair de Itacimirim para chegar a Salvador ao meio-dia, sabendo que viajamos a 60 km/h, exceto na zona de engarrafamento, onde a velocidade é 6 km/h?

A) 10h43min **B)** 10h17min **C)** 10h48min **D)** 10h53min **E)** 11h01min

24. Seja $P(x) = a_{2000}x^{2000} + a_{1999}x^{1999} + a_{1998}x^{1998} + \ldots + a_1x + a_0$. Então $a_{2000} + a_{1998} + a_{1996} + \ldots + a_0$ é igual a

A) $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$ **B)** $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$ **C)** $P(2000) + P(1998) + \ldots + P(0)$

D) $P(0) \cdot P(1)$ **E)** $P(-1) \cdot P(1)$

25. Quantos números de três algarismos (que não começam com 0) possuem um algarismo que é a média aritmética dos outros dois?

A) 121 **B)** 117 **C)** 112 **D)** 115 **E)** 105

GABARITO

Terceiro Nível (Ensino Médio)

1) C	**6) E**	**11) D**	**16) E**	**21) B**
2) A	**7) C**	**12) C**	**17) D**	**22) C**
3) D	**8) D**	**13) A**	**18) D**	**23) A**
4) D	**9) C**	**14) B**	**19) E**	**24) B**
5) D	**10) E**	**15) B**	**20) A**	**25) A**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. C.- Veja a solução do problema 13 do Nível 2.
2. A.- Veja a solução do problema 9 do Nível 2.
3. D.- Veja a solução do problema 14 do Nível 2.

4. D.- Considere os seguintes conjuntos:
$A_1 = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ $A_2 = \{3; 6; 12\}$ $A_3 = \{5; 10; 20\}$ $A_4 = \{7; 14; 28\}$ $A_5 = \{9; 18\}$
$A_6 = \{11; 22\}$ $A_7 = \{13; 26\}$ $A_8 = \{15; 30\}$ $A_9 = \{17\}$; $A_{10} = \{19\}$;
$A_{11} = \{21\}$; $A_{12} = \{23\}$; $A_{13} = \{25\}$; $A_{14} = \{27\}$; $A_{15} = \{29\}$.
Cada conjunto contém números que são o dobro de algum número do mesmo conjunto. Observemos que podemos tomar todos os números dos conjuntos de A_9 a $A_{15,}$ somente um dos dois elementos dos conjuntos A_5 a A_8, dois elementos dos conjuntos de A_2 a A_4, e três elementos do conjunto A_1. Portanto podemos tomar no máximo $7 + 4 + 3 \cdot 2 + 3 = 20$ elementos.

5. D.- Veja a solução do problema 15 do Nível 2.

6. E.- Fazendo $x = 2000$ e $y = 0$, temos $f(2000 + 0) = 2000 + f(0) = 2000 + 2 = 2002$.

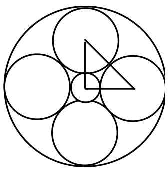
7. C.- Sejam x, y e z os números das cartas da esquerda, do meio e da direita, respectivamente. Temos que $x < y < z$ e $x + y + z = 13$. Assim, $x + x + x < x + y + z \Leftrightarrow x \le 4$. Observemos que $x \ne 4$ (se $x = 4$, teríamos $y = x$). Se $x = 3$, Carlos concluiria que $y = 4$ e $z = 6$, portanto, $x \ne 3$. Assim, $x = 1$ ou $x = 2$ e portanto $y + z \ge 11$. Como $2 < y < z$, conclui-se que $6 \le z \le 9$. Se $z = 6$, Tomás concluiria que $y = 5$ e $x = 2$, portanto $z \ne 6$. Se $z = 9$, Tomás concluiria que $x = 1$ e $y = 3$. Assim, $z = 7$ ou $z = 8$.
Neste momento, Samuel poderia achar todas as possíveis soluções. Se $x = 1$ e $z = 7$, teríamos $y = 5$; se $x = 1$ e $z = 8$, teríamos $y = 4$; se $x = 2$ e $z = 7$, teríamos $y = 4$; se $x = 2$ e $z = 8$, teríamos $y = 3$. Assim, Samuel saberia que os possíveis valores de y são 3, 4 e 5. Ora, se $y = 3$ ou $y = 5$, Samuel descobriria os números (se $y = 3$, Samuel concluiria que $x = 2$ e $z = 8$; se $y = 5$, Samuel concluiria que $x = 1$ e $z = 7$). Logo o número da carta do meio é 4.

8. D.- Veja a solução do problema 16 do Nível 2.
9. C.- Veja a solução do problema 12 do Nível 2.

10. E.- Para $x \le 48$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \le 6$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \le 3$. Para $49 \le x \le 63$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor = 7$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor = 3$. Para $x \ge 64$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \ge 8$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \ge 4$. Assim, as soluções são todos os inteiros entre 49 e 63, que são 15 ao todo.

11. D.- Veja a solução do problema 20 do Nível 2.
12. C.- Veja a solução do problema 18 do Nível 1.

13. A.-



Observando a figura acima, sendo r o raio das quatro circunferências congruentes, temos $(2r)^2 = (r + 1)^2 + (r + 1)^2 \Leftrightarrow r = 1 + \sqrt{2}$. Assim, $R = 1 + 2r = 3 + 2\sqrt{2}$.

14. B.- Veja a solução do problema 8 do Nível 2.

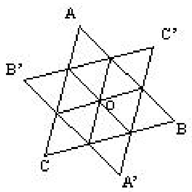
15. B.- Veja a solução do problema 10 do Nível 2.

16. E.- Temos que os dois nadadores estarão novamente em lados opostos da piscina após mmc(90,60) = 180 s = 3 min. Contemos assim o número de encontros neste intervalo de tempo.
Quando ocorrer o primeiro encontro, os dois nadadores terão nadado juntos uma piscina. A cada próximo encontro eles terão nadado juntos duas piscinas. Como em 3 minutos eles nadarão juntos 180/45 + 180/30 = 10 piscinas e 10 = 1 + 4 · 2 + 1, temos no total 4 + 1 = 5 encontros.
Assim, como há 5 encontros em 3 min, temos um total de 5 · (12/3) = 20 encontros.

17. D.- Sejam x e $29 - x$ os números. Temos então que o valor mínimo de $f(x) = x^2 + (29 - x)^2 = 2x^2 - 58x + 841$ ocorre quando $x = -\dfrac{-58}{2 \cdot 2}$ = 14,5. Como x é inteiro, devemos ter $x = 14$ ou $x = 15$. Como $14^2 + (29 - 14)^2 = 421$, o valor mínimo desejado é 421.

18. D.- Veja a solução do problema 1 do Nível 2.
19. E.- Veja a solução do problema 17 do Nível 2.
20. A. Veja a solução do problema 10 do Nível 1.

21. B.- Ao dividir a figura em triângulos equiláteros congruentes vemos que a razão entre a área da região destacada e a área do triângulo *ABC* é $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.



22. C.- Veja a solução do problema 14 do Nível 1.
23. A.- Veja a solução do problema 19 do Nível 2.

24. B.- Temos $P(1) = a_{2000} + a_{1999} + a_{1998} + \dots + a_0$ e $P(-1) = a_{2000} - a_{1999} + a_{1998} - \dots + a_0$. Portanto $P(1) + P(-1) = 2(a_{2000} + a_{1998} + \dots + a_0) \Leftrightarrow a_{2000} + a_{1998} + \dots + a_0 = \dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$.

25. A.- Observemos primeiro que existem 9 números nos quais os três algarismos são iguais, a saber, 111, 222, 333, …, 999. Consideremos agora os possíveis números nos quais os três algarismos são distintos. Para que 8 seja a média, existe somente a combinação 897. Para que 7 seja a média, temos as combinações 786 e 795. Para que 6 seja a média, temos as combinações 675, 684 e 693. Para que 5 seja a média, temos as combinações 564, 573, 582 e 591. Com média 4 temos 453, 462, 471 e 480, com média 3 temos 342, 351 e 360, com média 2 temos 231 e 240 e com média 1 temos somente 120. Temos no total 20 combinações com algarismos distintos. Todas podem ser escritas de 6 maneiras distintas (permutando os algarismos), exceto as 4 que têm um zero, excluindo 2 possibilidades. Assim, o total desejado é 9 + 6 · 16 + 4 · 4 = 121.