XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 1

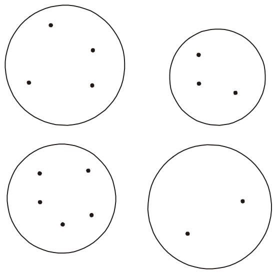
1ª. Fase Olimpíada Regional
AM – GO – PA – RJ – RS – SC

09 de junho de 2001

- *Prova de* **20** *questões.*
- *A Duração da prova é de* **3** *horas.*
- *Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.*
- *Você pode solicitar papel para rascunho.*
- *Entregue apenas a folha de respostas.*

1. Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. O menor valor possível para a diferença entre eles é:
A) 111 **B)** 49 **C)** 29 **D)** 69 **E)** 5

2. Na figura abaixo, temos 4 circunferências e alguns pontos destacados no interior dessas circunferências. Escolhendo exatamente um desses pontos dentro de cada uma das circunferências, e unindo-os por segmentos de reta que não se cruzam, formamos um quadrilátero. Quantos quadriláteros diferentes seremos capazes de desenhar nessas condições?



A) 4 **B)** 14 **C)** 60 **D)** 120 **E)** 24

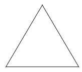
3. Joana escreve a seqüência de números naturais 1, 6, 11, ..., onde cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de três algarismos. Esse número é:
A) 100 **B)** 104 **C**) 101 **D)** 103 **E)** 102

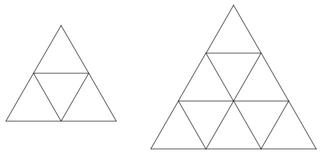
4. Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5 ?
A) 1 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 4 **E)** mais de 4

5. No conjunto {101, 1 001, 10 001, ..., 1 000 000 000 001} cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:
A) é igual 11
B) é igual a 4
C) é menor do que 3
D) é maior do que 4 e menor do que 11
E) é 3

6. Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pera para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).
A) 15 litros **B)** 45 litros **C)** 75 litros **D)** 80 litros **E)** 30 litros

7. O triângulo equilátero T à direita tem lado 1. Juntando triângulos congruentes a esse, podemos formar outros triângulos equiláteros maiores, conforme indicado no desenho abaixo.





Qual é o lado do triângulo equilátero formado por 49 dos triângulos T?

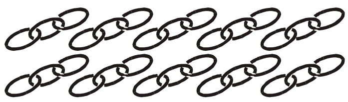
A) 7 **B)** 49 **C)** 13 **D)** 21

E) é impossível formar um triângulo equilátero com esse número de triângulos T

8. Os números inteiros positivos de 1 a 1000 são escritos lado a lado, em ordem crescente, formando a seqüência 123456789101112131415... 9991000. Nesta seqüência, quantas vezes aparece o grupo “89” ?

A) 98 **B)** 32 **C)** 22 **D)** 89 **E)** 21

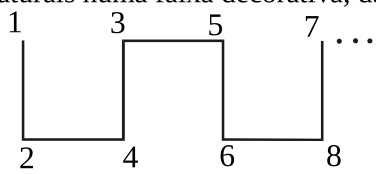
9. Um serralheiro tem 10 pedaços de 3 elos de ferro cada um, mostrados abaixo.



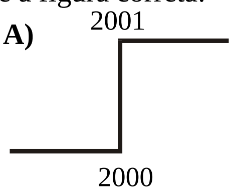
Ele quer fazer uma única corrente de 30 elos. Para abrir e depois soldar um elo o serralheiro leva 5 minutos. Quantos minutos **no mínimo** ele levará para fazer a corrente?

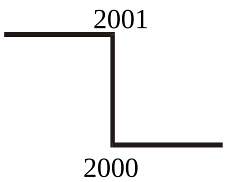
A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 50

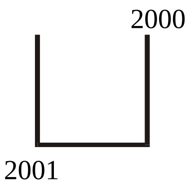
10. Escrevem-se os números naturais numa faixa decorativa, da seguinte maneira:

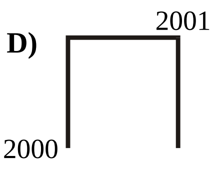


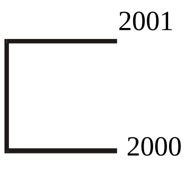
Assinale a figura correta:

A)


B)


C)


D)


E)


11. 2 melancias custam o mesmo que 9 laranjas mais 6 bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa a metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas é igual ao preço de:

A) 3 melancias **B)** 4 melancias **C)** 6 melancias **D)** 5 melancias **E)** 2 melancias

12. Qual é o último algarismo da soma de 70 números inteiros positivos consecutivos?

A) 4 **B)** 0 **C)** 7 **D)** 5 **E)** Faltam dados

13. Em Tumbólia, um quilograma de moedas de 50 centavos equivale em dinheiro a dois quilogramas de moedas de 20 centavos. Sendo 8 gramas o peso de uma moeda de 20 centavos, uma moeda de 50 centavos pesará:

A) 15 gramas **B)** 10 gramas **C)** 12 gramas **D)** 20 gramas **E)** 22 gramas

14. As medidas dos lados de um retângulo são números inteiros distintos. O perímetro e a área do retângulo se exprimem pelo mesmo número. Determine esse número.

A) 18 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 9 **E)** 36

15. O número *N* de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171.
A soma dos algarismos de *N* é:

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

16. Em um tabuleiro retangular com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas.
Podemos afirmar que:

A) Todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.
B) Nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.
C) Alguma coluna não tem casas ocupadas.
D) Alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.
E) Todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

17. Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é:

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

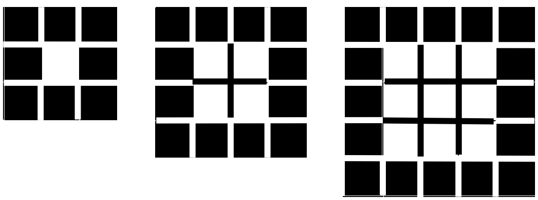
18. São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, 11, 121, 411, etc). A soma de todos estes números é:

A) 6882 **B)** 5994 **C)** 4668 **D)** 7224 **E)** 3448

19. Cinco animais *A*, *B*, *C*, *D*, e *E*, são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. *A* diz que *B* é um cão. *B* diz que *C* é um lobo. *C* diz que *D* é um lobo. *D* diz que *B* e *E* são animais de espécies diferentes. *E* diz que *A* é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

20. Com azulejos quadrados brancos e pretos todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos.



A regra para se construir estes mosaicos é a seguinte: inicialmente formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; e em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos; e assim sucessivamente.
Com 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários para se fazer uma seqüência de mosaicos como esta?

A) 55 **B)** 65 **C)** 75 **D)** 85 **E)** 100

GABARITO

Este é o gabarito para os três níveis. Observe que algumas questões são utilizadas em mais de um nível e a solução é dada apenas uma vez.
Consideramos o uso de uma mesma questão em mais de um nível como um fator interessante e que reflete o caráter da Olimpíada de Matemática como uma prova de raciocínio e não de verificação do aprendizado de material ao qual o aluno tenha sido exposto recentemente.

NÍVEL 1 (5ª. e 6ª. séries)

1) E	**6) C**	**11) A**	**16) D**
2) D	**7) A**	**12) D**	**17) E**
3) C	**8) B**	**13) B**	**18) A**
4) B	**9) B**	**14) A**	**19) D**
5) D	**10) D**	**15) C**	**20) A**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. **(E)** Para que a diferença seja a menor possível, os algarismos das centenas desses números devem diferir em uma unidade. Além disso, o número formado apenas por algarismos pares deve ter a menor dezena possível, ou seja, 02; o número formado apenas por algarismos ímpares deve ter a maior dezena possível, ou seja 97. Assim o menor valor possível para a diferença ocorre quando os números são 402 e 397 ou 602 e 597, e, portanto, é 5.

2. **(D)** Basta escolher um ponto de cada circunferência. Isso pode ser feito de $4\times3\times2\times5=120$ maneiras diferentes (no enunciado subentende-se que dos quatro pontos escolhidos de cada vez, não haja três alinhados).

3. **(C)** Os números da seqüência, quando divididos por 5, deixam resto igual a 1. O menor número de três algarismos nessas condições é o 101.

4. **(B)** Como os números devem ser compostos e ter dois algarismos, eles devem ser múltiplos de 7, mas não múltiplos de 2, de 3 nem de 5. Só podem ser $7\times7 = 49$, $7\times11 = 77$ e $7\times13 = 91$.

5. **(D)** O conjunto dado tem 11 números. Os números com quantidade par de zeros são divisíveis por 11. Por exemplo, 1001 é igual a 91×11 (na verdade, basta aplicar o critério de divisibilidade por 11). Há 5 números nessas condições; além disso, o número 101 é primo, logo a quantidade de números compostos é maior do que 4 e menor do que 11. (na verdade, 101 é primo e os dez outros números são compostos).

6. **(C)** Inicialmente, há 90 kg de água e 10 kg de matéria sólida. As peras devem ser desidratadas até o ponto em que esses 10 kg representem $100\% - 60\% = 40\%$ da massa total, ou seja, até que a massa total seja igual a $\frac{10}{40\%}=\frac{10}{0,4}=25$ kg. Logo $90 - (25 - 10) = 75$ litros de água serão evaporados.

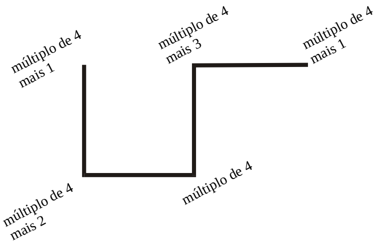
7. **(A)** Para formar um triângulo de lado 2, são necessários 4 T, para formar um triângulo de lado 3 são necessários 9 T, etc. Pode-se provar que para formar um triângulo de lado n, são necessários n^2 triângulos T. Logo o triângulo formado por 49 triângulos T tem lado 7.

8. **(B)** Na seqüência aparecem os números de um algarismo 8,9; com números de dois algarismos aparece uma vez o 89 e o agrupamento 98,99; com números de três algarismos que terminam com 89 temos 189, 289, ..., 989 num total de 9 números; com números que começam com 89, temos 890, 891, ..., 899 num total de 10 números; os agrupamentos 908, 909; 918, 919; ...; 998,999 também aparecem, num total de 10 números. Portanto, 89 aparece 1 + 2 + 9 + 10 + 10= 32 vezes.

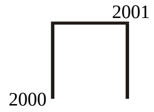
9. **(B)** Abrindo uma cadeia de três elos, o serralheiro emenda 4 cadeias de 3 elos, formando um pedaço de 15 elos. Por isso, com 6 elos, ele forma dois pedaços de 15 elos; abrindo mais um elo de um desses pedaços, ele emenda 15 com 14, formando a corrente de 30 elos. Levará portanto $7\times5=$ 35 minutos. Para verificar que não é possível em menos tempo, basta observar que, abrindo 6 elos, restam pelo menos 8 pedaços formados por 1, 2 ou 3 elos fechados e que necessitam de pelos menos 7 elos abertos para serem ligados.

10. (D)

Observando como os números aparecem nos cantos, percebemos que aparecem



Como 2000 é múltiplo de 4, a resposta correta é:

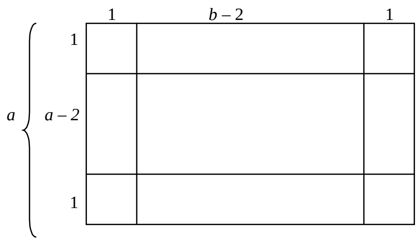


11. (A) Se 6 bananas = $\frac{1}{2}$ melancia então 24 bananas = 2 melancias = 9 laranjas + 6 bananas. Portanto, 18 bananas = 9 laranjas, ou seja, 2 bananas = 1 laranja. Assim, 12 laranjas + 12 bananas = 24 bananas + 12 bananas = 36 bananas = 3 melancias.

12. (D) A cada 10 inteiros consecutivos aparecem todos os algarismos 0, 1, 2,…, 9 como último algarismo. Como sua soma é 45, que termina em 5, e $7 \times 5 = 35$, que também termina em 5, a soma de 70 números inteiros positivos consecutivos sempre termina em 5.

13. (B) 2 quilogramas de moedas de 20 centavos correspondem a $\frac{2000}{8} = 250$ moedas de 20 centavos, que valem o mesmo que 100 moedas de 50 centavos. Assim, 100 moedas de 50 centavos pesam 1 quilograma, logo cada moeda pesa 10 gramas.

14. (A)



Trace retas paralelas aos lados a uma distância 1. O perímetro é igual em valor numérico à soma das áreas dos quatro retângulos finos junto aos lados.

Como esta soma é igual à área total do retângulo vemos que a área do pequeno retângulo central é igual à soma das áreas dos quatro quadrados nos cantos. Assim $(a-2)(b-2) = 4$.

Como $a \neq b$ temos $a - 2 = 4$, $b - 2 = 1$ ou $a - 2 = 1$, $b - 2 = 4$.

15. (C) $453 \times 7 = 3171$

16. (D) Se cada linha tiver 5 casas ocupadas teremos 30 casas ocupadas, apenas. Logo, alguma linha tem 6 ou mais casas ocupadas.

17. (E) O número total de alunos da turma é menor que 30, é par, é maior que 15 e deixa resto 1 quando dividido por 5. Logo, é 26. Temos 11 meninos.

18. (A) Os números formados são da forma $a11$, $1a1$ ou $11a$, onde a é um dos nove algarismos restantes. Para um dado a, a soma dos três números acima é $aaa + 222 = 111\times(a+2)$. Logo, a sua soma para todos os nove valores possíveis de a é:

$S = 111\,[(0 + 2 + 3 + \ldots + 9) + (9 \times 2)] = 111 \times (44 + 18) = 6882.$

19. (D) Se *A* é cão, *B* é cão, *C* é lobo, *D* é cão, *E* é lobo, o que é absurdo, pois *E* diria que *A* é um lobo. Assim, *A* é lobo, *B* é lobo, *C* é cão, *D* é lobo e *E* é lobo, e portanto há quatro lobos no grupo de animais.

20. (A) No primeiro mosaico, temos 3 + 3 + 1 + 1 = 8 azulejos pretos; no segundo, temos 4 + 4 + 2 + 2 = 12; no terceiro, temos 5 + 5 + 3 + 3 = 16; não é difícil perceber (e verificar) que os próximos mosaicos têm 20 e 24 azulejos pretos. Como 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 80, é possível construir exatamente 5 mosaicos. Assim serão necessários $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ azulejos brancos.

NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)

1) B	**6) B**	**11) B**	**16) B**	**21) B**
2) E	**7) A**	**12) D**	**17) E**	**22) D**
3) D	**8) D**	**13) C**	**18) A**	**23) A**
4) C	**9) Anulada**	**14) E**	**19) D**	**24) D**
5) B	**10) C**	**15) D**	**20) B**	**25) B**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. **(B) Veja a solução do problema 4 do nível 1.**

2. **(E)**, logo $BC = DC$. Como $m(B\hat{C}D) = 90^o$, temos $m(D\hat{B}C) = m(B\hat{D}C) = 45^o$. Mas $m(B\hat{C}A) = m(D\hat{C}E) = 80^o$. Portanto, $\alpha = 180^o - (45^o + 80^o) = 55^o$.

3. **Veja a solução do problema 5 do nível 1.**
4. **Veja a solução do problema 6 do nível 1.**
5. **Veja a solução do problema 8 do nível 1.**
6. **Veja a solução do problema 9 do nível 1.**
7. **Veja a solução do problema 11 do nível 1.**
8. **Veja a solução do problema 12 do nível 1.**
9. **Anulada**
10. **Veja a solução do problema 15 do nível 1.**

11. **(B)** Seja x o número de arcos percorridos e y o número de voltas dadas.
$P_1P_r = 35x = 360y \Rightarrow 7x = 72y \Rightarrow x = 72.$ Logo, $n = 73$.

12. **Veja a solução do problema 16 do nível 1.**

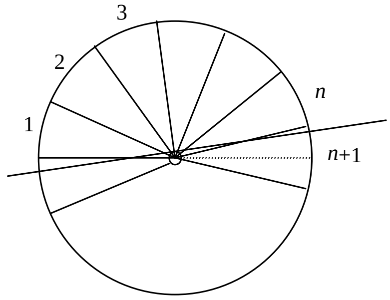
13. **(C)** $A\hat{B}C = B\hat{C}D = \dfrac{180(5-2)}{5} = 108°.$

$A\hat{B}F = 60°, F\hat{B}C = 48°, B\hat{C}F = \dfrac{180-48}{2} = 66°.$ Logo

$F\hat{C}D = 108° - 66° = 42°.$

14. **Veja a solução do problema 17 do nível 1.**

15. **(D)** Uma reta determina o número máximo de regiões no círculo quando corta o número máximo de setores (ou seja, o maior número possível de raios). A figura mostra uma reta que corta n+1 raios, ou seja, n+2 setores, determinando assim n+2 novas regiões, para um total de 3n+3 regiões. Este número é máximo, já que as extremidades dos raios extremos cortados por uma reta estão sempre em um mesmo semiplano determinado pela paralela à reta passando pelo centro do círculo.



16. **(B)** Paulo tem x reais e Cezar tem y reais

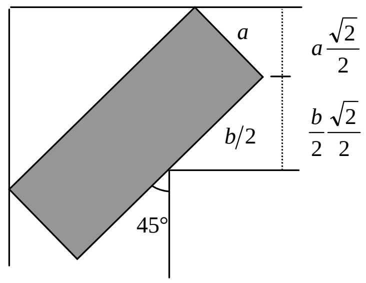
$x-5+\frac{1}{3}(y+5)=18$, $\frac{2}{3}(y+5)=18.$

Logo, $x = 14$ e $y = 22$. $y - x = 8$.

17. **(E)** Tomemos como unidade a quantidade de ração que 1 vaca come em 1 dia.
$10\cdot 24+10\cdot 30+n\cdot 10=24\cdot 60\Rightarrow n=90.$

18. **Veja a solução do problema 18 do nível 1.**

19. **(D)** A mesa pode ser empurrada pelo corredor de dois modos: utilizando apenas movimentos de translação ou girando-a em torno do ponto de encontro dos dois corredores. No primeiro caso, é preciso um corredor de largura igual à maior dimensão da mesa (ou seja b). No segundo caso, a posição crítica ocorre quando a mesa está igualmente inclinada em relação aos dois corredores (isto é, faz um ângulo de 45° com a horizontal). Neste caso, a largura mínima deve ser igual a $a\,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{b}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=(2a+b)\,\frac{\sqrt{2}}{4}$. Como $2a < b$, este valor é menor que $b\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ e, portanto, menor que b. Logo, a largura mínima do corredor deve ser igual a $(2a+b)\,\frac{\sqrt{2}}{4}$.



20. **(B)** O plano que secciona o cubo no item B é aquele que contém os segmentos que ligam os pontos médios de arestas paralelas não coincidentes de duas faces adjacentes. Pode-se verificar que as demais planificações não contém representações de interseções de planos com o cubo.

21. **(B)** Seja n^2 o quadrado perfeito. Como ele termina com 2001, temos $n^2 = 10000m + 2001 \Leftrightarrow n^2 - 1 = 2000(5m + 1) \Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) = 2^4 5^3(5m + 1)$. Como $mdc(n - 1; n + 1) = mdc(n + 1; n + 1 - (n - 1)) = mdc(n + 1, 2) = 2$ (pois n é ímpar), $n - 1$ ou $n + 1$ é divisível por $5^3 = 125$, assim $n = 125t + 1$ ou $n = 125t - 1$, onde t é inteiro positivo. Como n é ímpar, t é par, logo o menor valor possível para t é 2. Para $n = 125 \cdot 2 - 1 = 249$, temos $n^2 = 62001$, que termina em 2001. Logo o menor quadrado perfeito cujos últimos quatro dígitos são 2001 é $249^2 = 62001$ que tem 5 dígitos.

22. **(D)** Seja S a extensão do circuito, $t > 0$ o tempo gasto pelo Papa-Léguas para dar a primeira volta e $t' > 0$ o tempo gasto para dar as outras 99 voltas. Temos $\frac{s}{t} = 200$ e a velocodade média do Papa-Léguas na corrida é $\frac{100S}{t+t'}=\frac{20000t}{t+t'}<20000$. Por outro lado, como nada sabemos sobre o valor de t', se $t' < 9t$ teremos $\frac{100s}{t+t'} > 2000$. Assim a opção correta é D.

23. **Veja a solução do problema 20 do nível 1.**
24. **Veja a solução do problema 19 do nível 1.**

25. **(B)** Sejam M, N, O, P, Q e R os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA na circunferência inscrita, respectivamente, e seja $x = AM$. Temos $AR = AM = x$, $MB = 1 - x$, $BN = MB = 1 - x$, $NC = 2 - (1 - x) = 1 + x$, $CO = NC = 1 + x$, $OD = 3 - (1 + x) = 2 - x$, $DP = OD = 2 - x$, $PE = 4 - (2 - x) = 2 + x$, $EQ = PE = 2 + x$, $QF = 5 - (2 + x) = 3 - x$ e $FR = QF = 3 - x$. Logo $FA = FR + AR = 3 - x + x = 3$.

NÍVEL 3 (Ensino médio)

1) B	**6) B**	**11) D**	**16) D**	**21) C**
2) E	**7) C**	**12) D**	**17) B**	**22) C**
3) D	**8) B**	**13) B**	**18) C**	**23) B**
4) C	**9) C**	**14) D**	**19) B**	**24) B**
5) B	**10) D**	**15) A**	**20) A**	**25) E**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. **Veja a solução do problema 4 do nível 1.**
2. **Veja a solução do problema 2 do nível 2.**
3. **Veja a solução do problema 3 do nível 2.**
4. **Veja a solução do problema 4 do nível 2.**
5. **Veja a solução do problema 5 do nível 2.**
6. **Veja a solução do problema 9 do nível 1.**
7. **Veja a solução do problema 15 do nível 1.**
8. **Veja a solução do problema 11 do nível 2.**
9. **Veja a solução do problema 13 do nível 2.**
10. **Veja a solução do problema 15 do nível 2.**
11. **Veja a solução do problema 22 do nível 2.**

12. **(D)** Observemos que a base da potência no lado esquerdo da igualdade é par. Como o expoente da potência é inteiro e positivo (é igual a $(x – 1)^2 + 1$), temos que a base, em módulo, é menor ou igual a 4, sendo então igual a –2, 2 ou 4. Assim, a equação dada é equivalente a ($–6x^2 + 12x – 2 = –2$ e $x^2 – 2x + 2 = 2$) ou ($–6x^2 + 12x – 2 = 2$ e $x^2 – 2x + 2 = 2$) ou ($–6x^2 + 12x – 2 = 4$ e $x^2 – 2x + 2 = 1$). Na primeira possibilidade, temos $x = 0$ ou $x = 2$; a segunda possibilidade não apresenta solução; a terceira possibilidade nos fornece $x = 1$. Assim, a equação admite três soluções inteiras distintas.

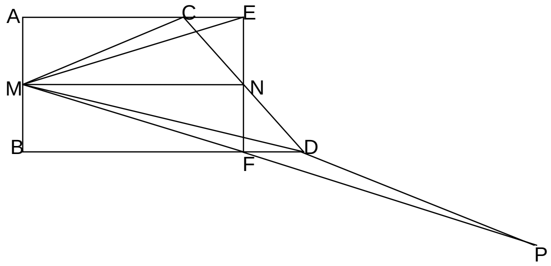
13. **(B)** O fato de que todos os alunos têm a mesma probabilidade de serem sorteados não é alterado pela perda da primeira bola sorteada. Assim, Pedro continua com uma probabilidade igual a 1/30 de ser sorteado.

14. **Veja a solução do problema 19 do nível 1.**
15. **Veja a solução do problema 18 do nível 1.**
16. **Veja a solução do problema 19 do nível 2.**
17. **Veja a solução do problema 20 do nível 2.**

18. **(C)** Considere a equação $f(g(x)) = 2$. Temos $(g(x))^2 – 3g(x) + 4 = 2 \Leftrightarrow g(x) = 1$ ou $g(x) = 2$.
Ao resolvermos $f(h(x)) = 1$, temos $(h(x))^2 – 3h(x) + 4 = 1$, que não tem solução. Assim, sendo $g(x) = f(f...(x))$ (com f aplicada 1999 vezes), temos que resolver $f(f(g(x))) = 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = 1$ ou $f(g(x)) = 2$. Como $f(g(x)) = 1$ não tem solução, temos $g(x) = 1$ ou $g(x) = 2$. Repetindo esta idéia sucessivamente, obtemos $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 – 3x + 4 = 1$ ou $x^2 – 3x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$. Assim a equação tem 2 soluções, a saber, 1 e 2.

19. **Veja a solução do problema 21 do nível 2.**

20. Considere a figura a seguir (na qual assumimos, sem perda de generalidade, que AC < BD).



Seja EF a paralela a AB por N. Temos que $m(EMF) = \alpha$. Além disso, $m(M\hat{E}A) = m(M\hat{F}B) < 90^o$. Considere P sobre MF tal que $PF = ME$. Como $PF = ME$, $m(D\hat{F}P) = m(M\hat{F}B) = m(M\hat{E}C)$ e $FD = CE$, pelo caso LAL temos que os triângulos MEC e PFD são congruentes. Logo $m(F\hat{P}D) = m(C\hat{M}E)$ e $PD = MC$. Como $MD^2 = BD^2 + MB^2 > AC^2 + MA^2 = MC^2$, temos $MD > MC \Leftrightarrow MD > PD \Leftrightarrow m(M\hat{P}B) > m(P\hat{M}D)$ (observe o triângulo MPD) $\Leftrightarrow m(C\hat{M}E) > m(F\hat{M}D)$.

Logo β = $m(E\hat{M}F)$ – $m(F\hat{M}D)$ + $m(C\hat{M}E)$ = α + $m(C\hat{M}E)$ – $m(F\hat{M}D)$ > α.

Outra solução:

Pela lei dos senos aplicada ao triângulo *MCE*, temos $\dfrac{CE}{sen\ (C\hat{M}E)} = \dfrac{MC}{sen\ (M\hat{E}A)}$ (I)

Aplicando a lei dos senos agora ao triângulo *MFD*, temos

$$\frac{FD}{sen\ (F\hat{M}D)} = \frac{MD}{sen\ (M\hat{F}D)} = \frac{MD}{sen\ (M\hat{F}B)} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos

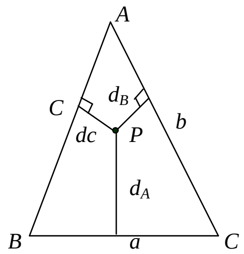
$$\frac{sen(F\hat{M}D)}{sen(C\hat{M}E)} = \frac{MC}{MD}$$

Como *MC* < *MD*, temos $sen(F\hat{M}D) < sen(C\hat{M}E)$. Como estes ângulos são agudos, $m(F\hat{M}D) < m(C\hat{M}E)$. Logo β = $m(E\hat{M}F)$ – $m(F\hat{M}D)$ + $m(C\hat{M}E)$ = α + $m(C\hat{M}E)$ – $m(F\hat{M}D)$ > α.

21. **(C)** Seja $y = x^2 + x$. Temos $x^2 + x + 1 = 156/(x^2 + x) \Leftrightarrow y + 1 = 156/y \Leftrightarrow y^2 + y - 156 = 0 \Leftrightarrow y = 12$ ou $y = -13 \Leftrightarrow x^2 + x = 12$ ou $x^2 + x = -13 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ ou $x^2 + x + 13 = 0$. A segunda equação não tem solução, assim a soma das soluções reais da equação original é –1/1 = –1.

22. **(C)** Seja *ABC* um triângulo acutângulo, no qual supomos que *a* seja o menor lado. A soma das distâncias de um ponto *P* aos lados é $d_A + d_B + d_C = \dfrac{2S_A}{a} + \dfrac{2S_B}{b} + \dfrac{2S_C}{c}$, onde S_A, S_B e S_C são as áreas dos triângulos *PBC*, *PAC* e *PAB*, respectivamente. Como $S_A + S_B + S_C$ é constante, $d_A + d_B + d_C$ é máxima quando a única parcela não nula é relativa ao maior coeficiente 0, que é $\dfrac{2}{a}$.

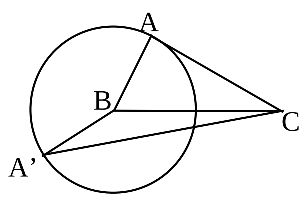
Logo, o máximo da soma ocorre quando *P* é o vértice oposto ao menor lado e é, portanto, igual à maior altura do triângulo.



23. **(B)** Temos $a_1 = 2002$, $a_2 = 2003$, …, $a_9 = 2010$, $a_{10} = 201$, $a_{11} = 202$, …, $a_{19} = 210$, $a_{20} = 21$, $a_{21} = 22$, …, $a_{29} = 30$, $a_{30} = 3$, $a_{31} = 4$, …, $a_{37} = 10$ e finalmente $a_{38} = 1$.

24. **Veja a solução do problema 25 do nível 2.**

25. **(E)** Considere que os pontos *B* e *C* estão fixos e que *A* gira em torno de *B*. Assim, *A* está na circunferência com centro *B* e raio 5.



Temos que o ângulo $\hat{C}$ é máximo quando *AC* tangencia a circunferência. Neste caso, temos que o ângulo $\hat{A}$ é reto. Logo, pelo teorema de Pitágoras, $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 6^2 - 5^2 = 11 \Leftrightarrow AC = \sqrt{11}$. Assim, a área do triângulo *ABC* é $AB \cdot AC/2 = 5\sqrt{11}/2$.