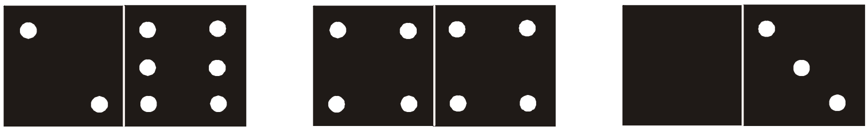
XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. ou 6ª. séries)

PROBLEMA 1

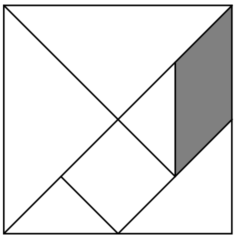
O jogo de dominó é formado por 28 peças retangulares distintas, cada uma com duas partes, com cada parte contendo de 0 a 6 pontinhos. Por exemplo, veja três dessas peças:



Qual é o número total de pontinhos de todas as peças?

PROBLEMA 2

As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 1, qual é a área do paralelogramo?

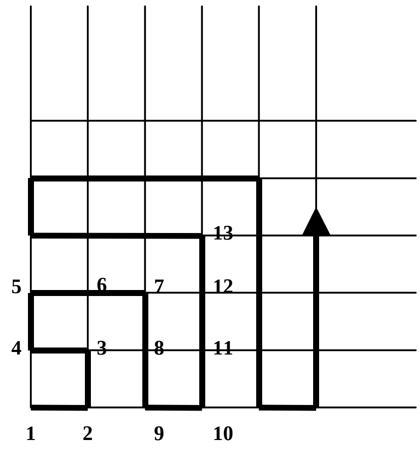


PROBLEMA 3

Carlinhos faz um furo numa folha de papel retangular. Dobra a folha ao meio e fura o papel dobrado; em seguida, dobra e fura novamente o papel dobrado. Ele pode repetir esse procedimento quantas vezes quiser, evitando furar onde já havia furos. Ao desdobrar a folha, ele conta o número total de furos feitos. No mínimo, quantas dobras deverá fazer para obter mais de 100 furos na folha?

PROBLEMA 4

Os pontos da rede quadriculada abaixo são numerados a partir do vértice inferior esquerdo seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



PROBLEMA 5

Apresente todos os números inteiros positivos menores do que 1000 que têm exatamente três divisores positivos. Por exemplo: o número 4 tem exatamente três divisores positivos: 1, 2 e 4.

PROBLEMA 6

Seja $\boldsymbol{N}$ o número inteiro positivo dado por $\boldsymbol{N} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de $\boldsymbol{N}$?

SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
A quantidade de pontinhos nas peças varia de 0 a 12; há uma peça com 0 pontinho, 1 peça com 1 pontinho, 2 com 2 pontinhos, 2 com 3 pontinhos, 3 com 4 pontinhos, 3 com 5 pontinhos, 4 com 6 pontinhos, 3 com 7 pontinhos, 3 com 8 pontinhos, 2 com 9 pontinhos, 2 com 10 pontinhos, 1 com 11 pontinhos, 1 com 12 pontinhos. O número total de pontinhos é:

$$1.0 + 1.1 + 2.2 + 2.3 + 3.4 + 3.5 + 4.6 + 3.7 + 3.8 + 2.9 + 2.10 + 1.11 + 1.12 = 168$$

Outra solução:
Cada tipo de pontuação aparece 8 vezes dentre as 28 peças do dominó. Portanto, o número total de pontos é: $8.(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 168$.

Outra solução:
Listar todas as possibilidades e somar tudo.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Traçando a menor diagonal do paralelogramo, observamos que metade do mesmo equivale a um triângulo retângulo pequeno, cuja área é ¼ da área do triângulo retângulo grande, que, por sua vez, é ¼ da área do quadrado. Logo a área do paralelogramo é igual a $2 \times 1/16 = 1/8$.

Outra solução:
Cada triângulo retângulo grande tem área 1/4. Dois triângulos médios formam um triângulo grande. Logo o triângulo médio tem área 1/8. Dois triângulos retângulos pequenos formam um triângulo médio; logo cada um tem área 1/16. O quadrado equivale a dois triângulos pequenos; logo sua área é igual a 1/8. Portanto, a soma das áreas de todas as peças, exceto o paralelogramo, é $2 \times 1/4 + 1/8 + 1/8 + 2 \times 1/16 = 7/8$. Assim, resta área 1/8 para o paralelogramo.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Ao furar após a primeira dobra, Carlinhos faz 2 furos; após a segunda dobra, faz 4 furos, após a terceira dobra, faz 8 furos, etc. Assim, ao desdobrar a folha, ele irá contar $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ furos. Notando que:

$1 + 2 = 2^2 - 1$ (após a primeira dobra)
$1 + 2 + 4 = 2^3 - 1$ (após a segunda dobra)
$1 + 2 + 4 + 8 = 2^4 - 1$ (após a terceira dobra), etc

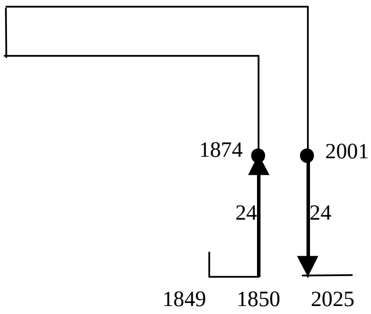
e observando que $2^6 - 1 < 100 < 2^7 - 1$, concluímos que o número de furos na folha passará a ser maior do que 100 a partir da sexta dobra.

Outra solução: (por tentativas)
Ao furar após a primeira dobra, Carlinhos faz 2 furos; após a segunda dobra, faz 4 furos, após a terceira dobra, faz 8 furos, etc. Assim, ao desdobrar a folha, ele irá contar $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ furos. Tem-se:

$1 + 2 = 3$ furos (após a primeira dobra)
$1 + 2 + 4 = 7$ furos (após a segunda dobra)
$1 + 2 + 4 + 8 = 15$ furos (após a terceira dobra)
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ furos (após a quarta dobra)
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ furos (após a quinta dobra)
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ furos (após a sexta dobra)

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Os pontos correspondentes aos quadrados perfeitos pares e ímpares estão sobre os lados vertical e horizontal do quadriculado, respectivamente. Os quadrados perfeitos mais próximos de 2001 são $1936 = 44^2$ e $2025 = 45^2$. Como 2001 está mais próximo de 2025, o ponto correspondente está no segmento vertical descendente que termina em 2025. Logo o ponto imediatamente abaixo dele corresponde ao número **2002**.
Para achar o número do ponto imediatamente à esquerda, consideramos o quadrado perfeito ímpar anterior, que é $43^2 = 1849$. O ponto desejado está no segmento ascendente que começa em 1850 e situado à mesma distância que o ponto 2001 está de 2025. Logo o número correspondente é:

$$1850 + (2025–2001) = 1850 + 24 = \mathbf{1874}.$$



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:
Se o número tiver exatamente dois fatores primos diferentes, ele vai ter 4 divisores positivos: 1, esses dois primos e produto deles. Se o número for primo, ele vai ter apenas dois divisores: 1 e ele próprio. Se o número for uma potência de primo com expoente maior que 2, ele vai ter pelo menos 4 divisores: 1, o tal primo, o quadrado e o cubo desse primo. Assim, a única possibilidade de que o número tenha exatamente 3 divisores é que ele seja um quadrado de um número primo.
Os números procurados são: 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961.

Solução mais formal:
Sabemos que todos os números inteiros maiores do que 1 admitem pelo menos um divisor (ou fator) primo. Dessa forma,

- se n tem dois divisores primos p e q então 1, p, q e pq são divisores de n; logo n tem mais que três divisores;
- se n é primo, então tem somente dois divisores: 1 e n;
- se n é uma potência de um primo p, ou seja, é da forma p^s, então 1, p, p^2, ..., p^s são os divisores positivos de n. Para que n tenha três divisores s deverá ser igual a 2, isto é, $n = p^2$. Assim, os inteiros menores que 1000 com três divisores são: 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:
Os algarismos das unidades dos quadrados dos números de 1 a 10 são, respectivamente, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0. Ora, a soma dos números formados por esses algarismos é 45. Portanto, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2$ tem como algarismo das unidades o número 5. De 11 a 20, os algarismos das unidades dos números se repetem na mesma ordem; portanto, o algarismo das unidades da soma de seus quadrados também é 5. Conseqüentemente, a soma dos quadrados dos números de 1 a 20 tem 0 como algarismo das unidades. Logo a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$ tem zero como algarismo das unidades se N é múltiplo de 20. Como $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 196883^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 196880^2 + 196881^2 + 196882^2 + 196883^2$, concluímos que o algarismo das unidades de N é o mesmo do número $0 + 1 + 4 + 9 = 14$, ou seja, 4.