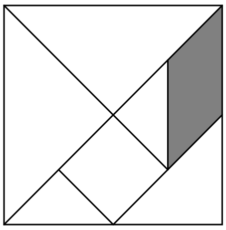
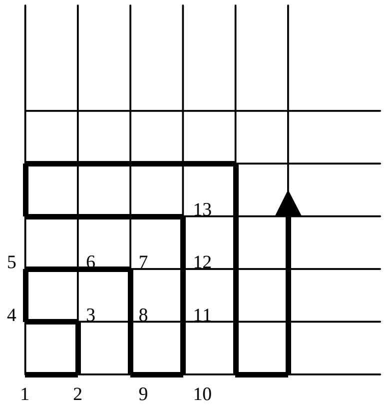
XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PROBLEMA 1
As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 1, qual é a área do paralelogramo?



PROBLEMA 2
Os pontos da rede quadriculada abaixo são numerados a partir do vértice inferior esquerdo seguindo o caminho poligonal sugerido no desenho. Considere o ponto correspondente ao número 2001. Quais são os números dos pontos situados imediatamente abaixo e imediatamente à esquerda dele?



PROBLEMA 3
Se a *n*-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por *n*, dizemos que esse ano é *super-olímpico*. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23ª OBM, é super-olímpico pois $2001 = 87 \cdot 23$ é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

PROBLEMA 4

As medidas dos ângulos do triângulo ABC são tais que $\hat{A} < \hat{B} < 90^\circ < \hat{C}$. As bissetrizes externas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ cortam os prolongamentos dos lados opostos BC e AB nos pontos P e Q, respectivamente. Sabendo que $\overline{AP} = \overline{CQ} = \overline{AC}$, determine os ângulos de ABC.

PROBLEMA 5

Dizemos que um conjunto A formado por 4 algarismos distintos e não nulos é *intercambiável* se podemos formar dois pares de números, cada um com 2 algarismos de A, de modo que o produto dos números de cada par seja o mesmo e que, em cada par, todos os dígitos de A sejam utilizados.

Por exemplo, o conjunto {1;2;3;6} é intercambiável pois $21 \cdot 36 = 12 \cdot 63$.

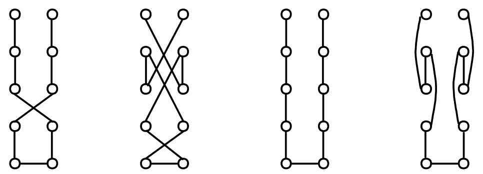
Determine todos os conjuntos intercambiáveis.

PROBLEMA 6

O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com 5 pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

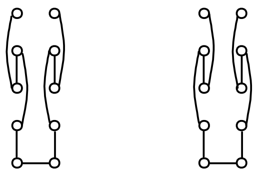
- o cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
- o cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- o cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.

Representamos a seguir algumas possibilidades.



Qual é o número total de possibilidades que o matemático tem para amarrar seu cadarço, obedecendo às regras acima?

Observação: Maneiras como as exibidas a seguir devem ser consideradas iguais (isto é, deve ser levada em conta apenas a ordem na qual o cadarço passa pelos furos).



SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Veja solução do problema 2 do nível 1.
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2: Veja solução do problema 4 do nível 1.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Observando que no ano n é realizada a (n – 1978)-ésima OBM, temos que o ano n é super-olímpico se, e somente se, $n - 1978$ divide n. Assim, $n - 1978$ divide $n - (n - 1978) = 1978$. Como os divisores positivos de 1978 são 1, 2, 23, 43, 46, 86, 989 e 1978, os anos super-olímpicos são 1979, 1980, 2001, 2021, 2024, 2064, 2967 e 3956.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Os triângulos ACQ e PAC são isósceles. No triângulo ACQ, temos: $C\hat{A}Q = A\hat{Q}C = \hat{A}$

$A\hat{C}Q = \hat{C} + (180° - \hat{C})/2 = 90° + \hat{C}/2$

Logo $2\hat{A} + (90° + \hat{C}/2) = 180°$ (1)

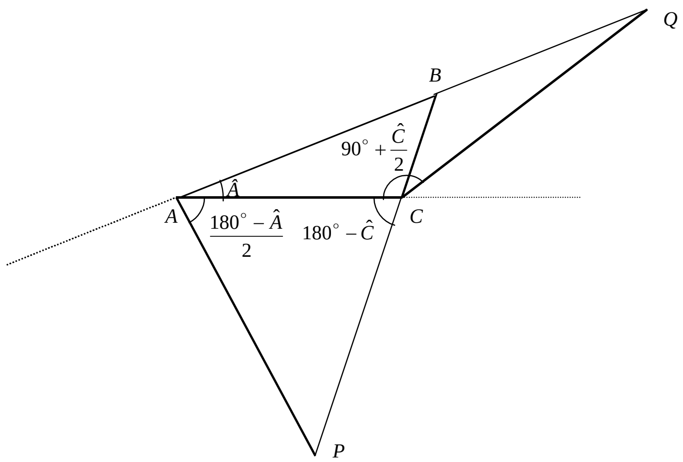
No triângulo PAC, temos:

$C\hat{A}P = (180° - \hat{A})/2$

$A\hat{C}P = A\hat{P}C = 180° - \hat{C}$

Logo $(180° - \hat{A})/2 + 2(180° - \hat{C}) = 180°$ (2)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos $\hat{A} = 12°$ e $\hat{C} = 132°$; daí, $\hat{B} = 180° - 12° - 132° = 36°$.



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:
Seja $A = \{x; y; t; z\}$ um conjunto intercambiável. Então podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$(10x + y)(10t + z) = (10y + x)(10z + t) \Leftrightarrow xt = yz \qquad (1)$$

Por (1), temos que 5 e 7 não podem aparecer em A. Se o maior dos elementos de A fosse menor ou igual a 4, teríamos $A = \{1;2;3;4\}$, que não é intercambiável. Logo A possui pelo menos um dos dígitos 6, 8 ou 9.
Se o maior elemento de A é 9, temos por (1) que 3 e 6 também pertencem a A. Neste caso temos o conjunto intercambiável $A = \{2;3;6;9\}$.
Se o maior elemento de A é 8, temos que 4 e outro algarismo par estão em A. Assim, temos $A = \{1;2;4;8\}$ ou $A = \{3;4;6;8\}$.
Se o maior elemento de A é 6, temos que 3 e outro algarismo par estão em A. Desta forma, $A = \{1;2;3;6\}$ ou

$A = \{2;3;4;6\}$.
Assim, temos no total 5 conjuntos intercambiáveis: $\{2;3;6;9\}$, $\{1;2;4;8\}$, $\{3;4;6;8\}$, $\{1;2;3;6\}$ e $\{2;3;4;6\}$.

SOLUÇÃO COMPLEMENTAR DO PROBLEMA 5:

Seja $A = \{x; y; z; t\}$ um conjunto intercambiável. Podemos supor que um dos pares de números é $10x + y$ e $10z + t$.

Observemos que, em cada par, podemos construir um conjunto D com os algarismos correspondentes às dezenas e outro conjunto U com os algarismos correspondentes às unidades. No par de números $10x + y$ e $10z + t$, temos $D = \{x; z\}$ e $U = \{y; t\}$.

Para o outro par de números, sejam D' e U' os conjuntos correspondentes às dezenas e unidades, respectivamente. Temos então os seguintes casos:

i) $D' = D = \{x; z\}$ e $U' = U = \{y; t\}$. A única possibilidade é $10x + t$ e $10z + y$. Temos então
$$(10x + y)(10z + t) = (10x + t)(10z + y) \Leftrightarrow (y - t)(z - x) = 0 \Leftrightarrow y = t \text{ ou } z = x, \text{ absurdo.}$$

ii) $D' = \{x; t\}$ e $U' = \{z; y\}$. Temos duas possibilidades:

- $10x + y$ e $10t + z$. Temos
$$(10x + y)(10z + t) = (10x + y)(10t + z) \Leftrightarrow t = z, \text{ absurdo.}$$
- $10x + z$ e $10t + y$. Temos
$$(10x + y)(10z + t) = (10x + z)(10t + y) \Leftrightarrow (100x - y)(z - t) = 10(z - x)(t - y) (*)$$

Sendo o maior valor de $|(z - x)(t - y)|$ igual a 49, temos que $|(100x - y)(z - t)| \le 490 \Rightarrow 100x - y \le 490 \Rightarrow x \le 4$. Além disso, 10 divide $(100x - y)(z - t)$ e portanto 5 divide $100x - y$ ou $z - t$.

Se 5 divide $100x - y$, 5 divide y e portanto $y = 5$. Assim
$$(*) \Leftrightarrow (20x - 1)(z - t) = 2(z - x)(t - y)$$

Observemos também que $1 \le |z - x| \le 8$ e $1 \le |t - y| \le 8$.

Para $x = 1$, temos que $20x - 1 = 19$ divide $z - x$ ou $t - y$, absurdo.

Para $x = 2$, temos $20x - 1 = 39$ e portanto 13 divide $z - x$ ou $t - y$, absurdo.

Para $x = 3$, temos que $20x - 1 = 59$ divide $z - x$ ou $t - y$, absurdo.

Para $x = 4$, temos que $20x - 1 = 79$ divide $z - x$ ou $t - y$, absurdo.

Se 5 divide $z - t$, temos $z - t = 5$ ou $z - t = -5$.

Se $z - t = 5$, temos
$$(*) \Leftrightarrow 100x - y = 2(t + 5 - x)(t - y)$$

Como $|(t + 5 - x)(t - y)| \le 8 \cdot 8 = 64$, temos $100x - y \le 128$. Logo $x = 1$. Temos então $100 - y = 2(t + 4)(t - y)$. Temos também que y é par. Para $y = 2$, temos $98 = 2(t + 4)(t - 2)$, que não tem solução inteira em t; para $y =$

4, temos $96 = 2(t + 4)(t - 4)$, que também não tem solução inteira em t; para $y = 6$, temos $94 = 2(t + 4)(t - 6)$; e para $y = 8$, temos $92 = 2(t + 4)(t - 8)$. Em todos os casos, não há soluções inteiras em t.

Se $z - t = -5$, temos

$$(*) \Leftrightarrow 100x - y = -2(t - 5 - x)(t - y)$$

Usando um argumento análogo ao anterior, temos que $x = 1$ e y é par. Substituindo $x = 1$ e $y = 2, 4, 6$ e 8 na equação acima, vemos que não há soluções inteiras em t.

iii) Os casos $D' = \{x; y\}$ e $U' = \{z; t\}$, $D' = \{z; y\}$ e $U' = \{x; t\}$ e $D' = \{z; t\}$ e $U' = \{x; y\}$ podem ser analisados de forma análoga aos anteriores.

iv) $D' = U = \{y; t\}$ e $U' = D = \{x; z\}$. Novamente, há duas possibilidades:

- $10y + z$ e $10t + x$. Temos

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + z)(10t + x) \Leftrightarrow 99(xz - yt) = 10(z - x)(t - y)$$

Assim, 11 divide $10(z - x)(t - y)$, ou seja, 11 divide $z - x$ ou $t - y$, absurdo.

Desta forma, só nos resta o caso

- $10y + x$ e $10t + z$, que é o caso estudado no gabarito anterior.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Como o padrão deve ser simétrico, basta decidir os primeiros 5 furos pelos quais o cadarço deve passar. A partir daí, os furos ficam determinados pela simetria. Por exemplo, o 7° furo deve ser o outro furo da mesma linha visitada no 4° furo. Note, ainda, que a simetria implica em que as linhas visitadas nos 5 primeiros furos são todas distintas. Além disso, a primeira destas linhas é obrigatoriamente a de cima e a 5ª é obrigatoriamente a de baixo, já que os furos da linha de baixo são visitados consecutivamente.

Assim, para obter um padrão para o cadarço, podemos iniciar pelo furo da esquerda da linha superior e devemos decidir:

- em que ordem as 3 linhas intermediárias são visitadas
- de que lado queremos passar nestas 3 linhas e na linha de baixo.

Para escolher a ordem das 3 linhas, observamos que a primeira pode ser escolhida de 3 modos; a seguir, a segunda pode ser escolhida de 2 modos, ficando a terceira determinada. Logo há 6 possibilidades de escolha para a ordem das linhas.

Para escolher o lado por onde passar nas 4 linhas, temos duas opções para cada uma delas, para um total de $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades. Logo o número total de modos de amarrar o cadarço é $6 \times 16 = 96$.

Outra solução:

Começando do lado esquerdo da linha superior, o segundo furo pode ser escolhido de 6 modos (qualquer um das linhas intermediárias); o terceiro de 4 modos (nas duas intermediárias restantes) e o quarto e quinto de 2 modos cada (suas linhas estão determinadas, bastando escolher o lado). Logo há um total de $6 \times 4 \times 2 \times 2 =$ 96 possibilidades.