XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PROBLEMA 1

Se a n-ésima OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é *super-olímpico*. Por exemplo, o ano 2001, em que está sendo realizada a 23ª OBM, é super-olímpico pois $2001 = 87 \cdot 23$ é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

PROBLEMA 2

No triângulo ABC, a mediana e a altura relativas ao vértice A dividem o ângulo $B\hat{A}C$ em três ângulos de mesma medida. Determine as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

PROBLEMA 3

Determine todas as funções f: R $\to$ R tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$ para todos os reais x e y.

PROBLEMA 4

Dizemos que um conjunto A formado por 4 algarismos distintos e não nulos é *intercambiável* se podemos formar dois pares de números, cada um com 2 algarismos de A, de modo que o produto dos números de cada par seja o mesmo e que, em cada par, todos os dígitos de A sejam utilizados.

Por exemplo, o conjunto {1;2;3;6} é intercambiável pois $21 \cdot 36 = 12 \cdot 63$.

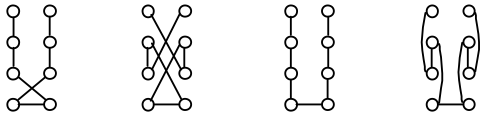
Determine todos os conjuntos intercambiáveis.

PROBLEMA 5

O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com n pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

- o cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
- o cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- o cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.

Por exemplo, para $n = 4$, representamos a seguir algumas possibilidades.



Determine, em função de $n \geq 2$, o número total de maneiras de passar o cadarço pelos furos obedecendo às regras acima.
Observação: Maneiras como as exibidas a seguir devem ser consideradas iguais.

PROBLEMA 6

Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Calcule

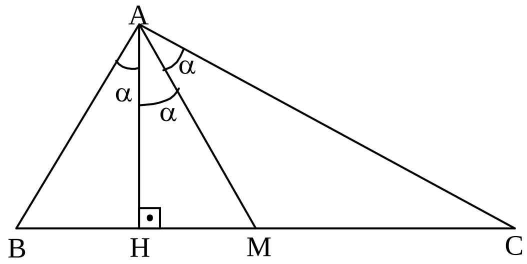
$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right) + f\left(\frac{3}{1}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{1}\right) \\
&+ f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{2}\right) \\
&+ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{3}\right) \\
&+ \dots \\
&+ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right),
\end{aligned}
$$

sendo n inteiro positivo.

SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1: Veja solução do problema 3 do nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Seja *M* o ponto médio de *BC* e *H* o pé da altura relativa a *A*. Temos que *AH* é comum aos triângulos *AHM* e *AHB*, $A\hat{H}B \cong A\hat{H}M$ (retos) e $H\hat{A}M \cong H\hat{A}B$, logo, pelo caso *ALA*, os triângulos *AHM* e *AHB* são congruentes. Assim, $BH = HM = MC/2$, pois $MC = MB$. Como *AM* é bissetriz de $H\hat{A}C$, pelo teorema das bissetrizes $AH/AC = HM/MC \Leftrightarrow AH/AC = 1/2 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 1/2$. Como $0 < 2\alpha < 180^o$, $2\alpha = 60^o \Leftrightarrow \alpha = 30^o$. Portanto os ângulos do triângulo *ABC* são $m(B\hat{A}C) = 3\alpha = 90^o$, $m(A\hat{B}C) = 90^o - \alpha = 60^o$ e $m(A\hat{C}B) = 90^o - 2\alpha = 30^o$.

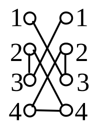
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Fazendo $y = -x$, temos $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) + 8x(-x) + 115 \Leftrightarrow f(0) = 2f(x) - 8x^2 + 115 \Leftrightarrow f(x) = 4x^2 + (f(0) - 115)/2$. Fazendo $x = 0$ nesta última igualdade, temos $f(0) = 4 \cdot 0^2 + (f(0) - 115)/2 \Leftrightarrow f(0) = -115$. Logo $f(x) = 4x^2 + (f(0) - 115)/2 \Leftrightarrow f(x) = 4x^2 - 115$ e verificamos de fato que esta função satisfaz as condições do enunciado: $f(-x) = 4(-x)^2 - 115 = 4x^2 - 115 = f(x)$ e $f(x) + f(y) + 8xy + 115 = 4x^2 - 115 + 4y^2 - 115 + 8xy + 115 = 4(x + y)^2 - 115 = f(x + y)$. Assim, $f(x) = 4x^2 - 115$ é a única função que satisfaz todas as condições do enunciado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4: Veja solução do problema 5 do nível 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Numere os furos superiores com o número 1, os furos imediatamente abaixo com o número 2 e assim por diante, até os furos inferiores, que recebem o número *n*. Observe que basta estabelecermos os primeiros *n* furos onde o cadarço irá passar (o padrão é simétrico). Uma maneira pode ser definida por uma seqüência indicando os números dos primeiros *n* furos onde o laço passa (observe que tal seqüência tem todos os números de 1 a *n*, começa com 1 e termina com *n*) e por uma outra seqüência de comprimento $n - 1$ cujo *k*-ésimo termo indica se o cadarço muda de lado ao passarmos do *k*-ésimo para o $(k + 1)$-ésimo termo da primeira seqüência. Por exemplo, (1, 3, 2, 4) e (muda, não muda, muda) representa



Assim, como há $(n - 2)!$ seqüências com os números de 1 a *n* começando com 1 e terminando com *n* e 2^{n-1} seqüências indicando se o cadarço muda de lado ou não, há $(n - 2)! \cdot 2^{n-1}$ maneiras.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Seja *S* a soma pedida. Como $f(x) + f(1/x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{(1/x)^2}{1+(1/x)^2} = 1$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
2S =\ & f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right) + f\left(\frac{3}{1}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{1}\right) \\
& + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{2}\right) \\
& + \cdots \\
& + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \\
& + f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right) + f\left(\frac{3}{1}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{1}\right) \\
& + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{2}\right) \\
& + \cdots \\
& + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \\
\Leftrightarrow 2S =\ & \left(f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{1}{1}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right)\right) + \left(f\left(\frac{3}{1}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
& + \cdots + \left(f\left(\frac{n}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) (n^2 \text{ pares de parcelas}) \\
\Leftrightarrow 2S =\ & n^2 \\
\Leftrightarrow S =\ & \frac{n^2}{2}
\end{aligned}
$$