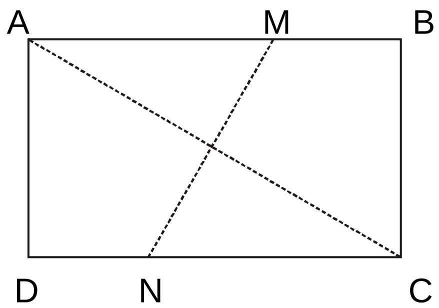
XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 2 (7ª. e 8ª. séries)

PROBLEMA 1:

Uma folha de papel retangular *ABCD*, de área 1, é dobrada em sua diagonal *AC* e, em seguida, desdobrada; depois é dobrada de forma que o vértice *A* coincida com o vértice *C* e, em seguida, desdobrada, deixando o vinco *MN*, conforme desenho abaixo.



a) Mostre que o quadrilátero *AMCN* é um losango.
b) Se a diagonal *AC* é o dobro da largura *AD*, qual é a área do losango *AMCN*?

PROBLEMA 2:

As 42 crianças de uma escola infantil deram as mãos formando uma fila e cada uma delas recebeu um número da seguinte maneira: a primeira delas ficou com o número 1, a segunda ficou com o número 2 e, assim sucessivamente, até a última, que ficou com o número 42. Continuando de mãos dadas, foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com números consecutivos ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal).
Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora Maria fez o desenho à esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado à direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: "O seu desenho está errado".

i) Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?

ii) Complete o desenho correto satisfazendo as condições do enunciado.

<table>
<tr><td></td><td>11</td><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>31</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

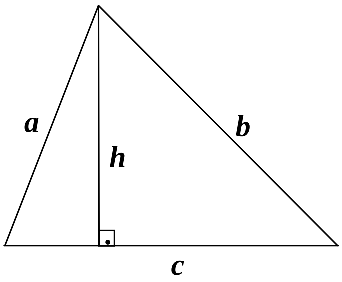
(Desenho de Maria)

<table>
<tr><td></td><td>11</td><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>31</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

(Desenho de Célia)

PROBLEMA 3:

Dado um inteiro positivo h demonstre que existe um número finito de triângulos de lados inteiros a, b, c e altura relativa ao lado c igual a h.



PROBLEMA 4:

Mostre que não existem dois números inteiros a e b tais que $(a + b)(a^2 + b^2) = 2001$.

PROBLEMA 5:

Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$.

Calcule os possíveis valores de $\dfrac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}$.

PROBLEMA 6:

Em um quadrilátero convexo, a *altura* em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto comum se e somente se o quadrilátero é inscritível, isto é, se e somente se existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.