

**XXIII OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**Terceira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)**

**PROBLEMA 1:**

Prove que  $(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}$  para quaisquer números reais positivos  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

**PROBLEMA 2:**

Dado um inteiro  $a_0 > 1$  definimos uma seqüência  $(a_n)_{n \geq 0}$  da seguinte forma; para cada  $k \geq 0$ ,  $a_{k+1}$  é o menor inteiro  $a_{k+1} > a_k$  tal que  $\text{mdc}(a_{k+1}, a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_k) = 1$ . Diga para quais valores de  $a_0$  temos que todos os termos  $a_k$  da seqüência são primos ou potências de primos.

**PROBLEMA 3:**

$E$  e  $F$  são pontos do lado  $AB$ , do triângulo  $ABC$ , tais que  $AE = EF = FB$ .  $D$  é ponto da reta  $BC$  tal que  $BC$  é perpendicular a  $ED$ .  $AD$  é perpendicular a  $CF$ . Os ângulos  $BDF$  e  $CFA$  medem  $x$  e  $3x$ , respectivamente. Calcule a razão  $(DB) / (DC)$ .

**PROBLEMA 4:**

Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla *sen* ou a tecla *cos*. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

**PROBLEMA 5:**

Em um quadrilátero convexo, a *altura* em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto comum se e somente se o quadrilátero é inscrito, isto é, se e somente se existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.

**PROBLEMA 6:**

Temos uma fileira longa de copos e  $n$  pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo A



Se há pelo menos uma pedra no copo  $i$  e pelo menos uma no copo  $i + 1$  podemos fazer uma pedra que está no copo  $i + 1$  pular para o copo  $i - 1$  eliminando uma pedra do copo  $i$ .

Movimento tipo B.



Se há pelo menos duas pedras no copo  $i$  podemos pular uma para o copo  $i + 2$  e outra para o copo  $i - 1$ .

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegaremos a uma configuração a partir da qual não é mais possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.