XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. ou 6ª. séries)

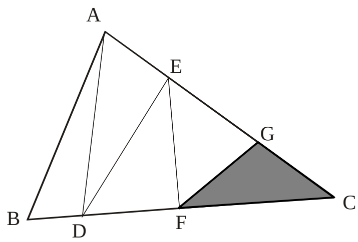
PROBLEMA 1

O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?
b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

PROBLEMA 2

Um fazendeiro resolveu repartir sua fazenda para seus cinco filhos. O desenho ao lado (fora de escala) representa a fazenda e as partes dos herdeiros, que são da forma triangular, de modo que $BD = \dfrac{BC}{4}$, $AE = \dfrac{AC}{3}$, $DF = \dfrac{DC}{2}$ e $EG = GC$. O filho mais novo recebeu o terreno representado pelo triângulo escuro, de 40 alqueires. Quantos alqueires tinha a propriedade original?



PROBLEMA 3

Dado um número, pode-se escrever o seu dobro ou suprimir o seu algarismo das unidades. Apresente uma seqüência que começa com 2002 e termina com 13, usando somente essas duas operações.

PROBLEMA 4

Três amigas foram para uma festa com vestidos azul, preto e branco, respectivamente. Seus pares de sapato apresentavam essas mesmas três cores, mas somente Ana usava vestido e sapatos de mesma cor. Nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos. Marisa usava sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.

PROBLEMA 5

No jogo pega-varetas, as varetas verdes valem 5 pontos cada uma, as azuis valem 10 pontos, as amarelas valem 15, as vermelhas, 20 e a preta, 50. Existem 5 varetas verdes, 5 azuis, 10 amarelas, 10 vermelhas e 1 preta. Carlinhos conseguiu fazer 40 pontos numa jogada. Levando em conta apenas a quantidade de varetas e suas cores, de quantas maneiras diferentes ele poderia ter conseguido essa pontuação, supondo que em cada caso fosse possível pegar as varetas necessárias?

PROBLEMA 6

Nas casas de um tabuleiro 8×8 foram escritos números inteiros positivos de forma que a diferença entre números escritos em casas vizinhas (quadrados com um lado comum) é 1. Sabe-se que numa das casas está escrito 17 e, em outra, está escrito 3. Desenhe um tabuleiro 8×8, preencha-o segundo essas regras e calcule a soma dos números escritos nas duas diagonais do tabuleiro.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

a) Os palíndromos entre 2000 e 3000 são da forma 2*aa*2, onde *a* é um algarismo. Logo os próximos quatro serão 2112, 2222, 2332 e 2442.

b) Como o primeiro algarismo é igual ao último, um palíndromo ímpar maior que 2002 deve começar e terminar por um número ímpar maior ou igual a 3. Logo o próximo será 3003.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Seja S a área do triângulo ABC.

Se $BD = \dfrac{BC}{4}$, então $(ABD) = \dfrac{S}{4}$.

Se $AE = \dfrac{AC}{3}$, então $(AED) = \dfrac{(ADC)}{3} = \dfrac{S - \frac{S}{4}}{3} = \dfrac{\frac{3S}{4}}{3} = \dfrac{S}{4}$.

Se $DF = \dfrac{DC}{2}$, então $(DEF) = \dfrac{(DEC)}{2} = \dfrac{S - \left(\frac{S}{4} + \frac{S}{4}\right)}{2} = \dfrac{S}{4}$.

Se $EG = EC$, então $(GFC) = \dfrac{(EFC)}{2} = \dfrac{S - \left(\frac{3S}{4}\right)}{2} = \dfrac{S}{8}$.

Como $(GFC) = 40$ temos $\dfrac{S}{8} = 40 \Leftrightarrow S = 320$ alqueires.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Uma possível solução é:

2002, 200, 20, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 51, 102, 204, 408, 816, 1632, 163, 326, 652, 1304, 130, 13.

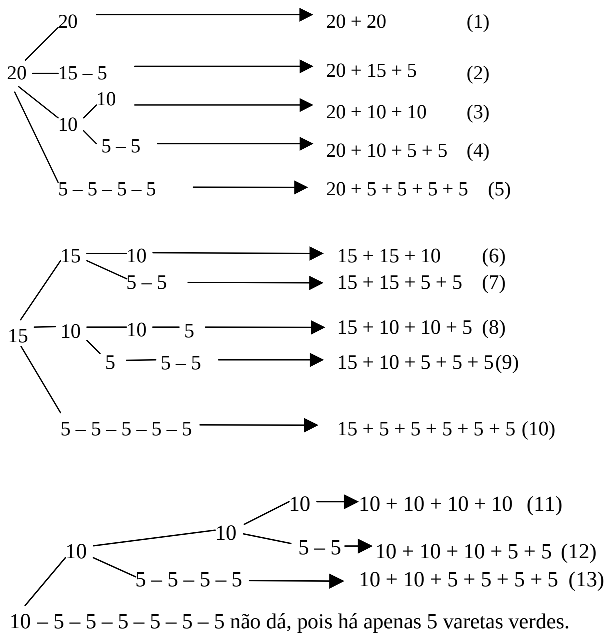
SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Como os sapatos de Marisa eram azuis, e nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos, conclui-se que os sapatos de Júlia eram pretos e portanto os sapatos de Ana eram brancos.

O vestido de Ana era branco, pois era a única que usava vestido e sapatos da mesma cor; conseqüentemente, o vestido de Júlia era azul e o de Marisa era preto.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

A soma dos pontos é 40. Segundo as regras do jogo, as possibilidades são:



SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Como a diferença entre o 17 e o 3 é 14, esses números devem estar em posições afastadas de 14 casas, contadas na horizontal ou vertical.

Portanto 17 e 3 devem ocupar as extremidades de uma das diagonais do tabuleiro.

A partir disso, o preenchimento das diagonais é feito de maneira única. E uma maneira de se preencher o tabuleiro é a seguinte:

17	16	15	14	13	12	11	10
16	15	14	13	12	11	10	9
15	14	13	12	11	10	9	8
14	13	12	11	10	9	8	7
13	12	11	10	9	8	7	6
12	11	10	9	8	7	6	5
11	10	9	8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5	4	3

a soma dos números escritos nas diagonais é: $8 \times 10 + (3 + 5 + ... + 17) = 160$.