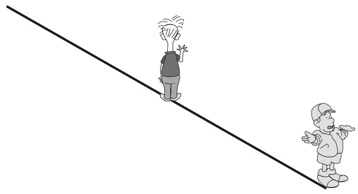
XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

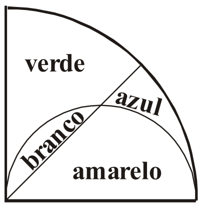
PROBLEMA 1

Geraldinho e Magrão saíram de suas casas no mesmo instante com a intenção de um visitar o outro, caminhando pelo mesmo percurso. Geraldinho ia pensando num problema de olimpíada e Magrão ia refletindo sobre questões filosóficas e nem perceberam quando se cruzaram. Dez minutos depois, Geraldinho chegava à casa de Magrão e meia hora mais tarde, Magrão chegava à casa de Geraldinho. Quanto tempo cada um deles andou?



Observação: Cada um deles anda com velocidade constante.

PROBLEMA 2

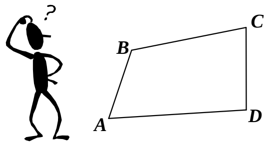


Um grande painel na forma de um quarto de círculo foi composto com 4 cores, conforme indicado na figura ao lado, onde o segmento divide o setor em duas partes iguais e o arco interno é uma semicircunferência. Qual é a cor que cobre a maior área?

PROBLEMA 3

Nas casas de um tabuleiro 8 × 8 foram escritos números inteiros positivos de forma que a diferença entre números escritos em casas vizinhas (quadrados com um lado comum) é 1. Sabe-se que numa das casas está escrito 17 e, em outra, está escrito 3. Calcule a soma dos números escritos nas duas diagonais do tabuleiro.

PROBLEMA 4



O professor Pardal está estudando o comportamento familiar de uma espécie de pássaro. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* da figura ao lado, representam a disposição de quatro ninhos desses pássaros. O professor construiu um posto de observação equidistante dos quatro ninhos.

Todos os ninhos e o posto de observação estão em um mesmo nível de altura a partir do solo, a distância de *B* a *D* é de 16 metros e $B\hat{A}D = 45°$. Determine a distância que o posto guarda de cada ninho.

PROBLEMA 5

O primeiro número de uma seqüência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira:
Calculamos o quadrado do número anterior $7^2 = 49$ e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é 4 + 9 + 1 = 14. Repetimos este processo, obtendo $14^2 = 196$ e o terceiro número da seqüência é 1 + 9 + 6 + 1 = 17 e assim sucessivamente. Qual o 2002º elemento desta seqüência?

PROBLEMA 6

O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?
b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?
c) O último ano palíndromo primo aconteceu há mais de 1000 anos, em 929. Determine qual será o próximo ano palíndromo primo.

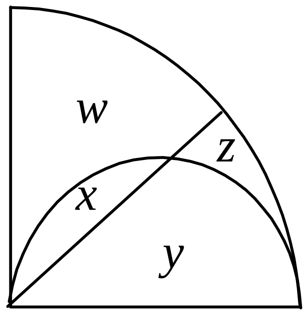
Soluções Nível 2 – Segunda Fase

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Seja $t > 0$ o tempo, em minutos, decorrido desde a saída de Geraldinho e Magrão até o instante do encontro.
Sejam g e m as distâncias entre o ponto de encontro e as casas de Geraldinho e Magrão, respectivamente. Como Geraldino percorre a distância g em t minutos e a distância m em 10 minutos, temos $\frac{g}{m} = \frac{t}{10}$.

Analogamente, $\frac{g}{m} = \frac{40}{t}$. Logo $\frac{t}{10} = \frac{40}{t} \Leftrightarrow t^2 = 400 \Leftrightarrow t = 20$ (pois $t > 0$). Logo Geraldinho andou 10 + 20 = 30 minutos e Magrão andou 40 + 20 = 60 minutos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2



Sejam x, y, z e w as áreas das regiões branca, amarela, azul e verde, respectivamente.

Seja R o raio do semi-círculo. Temos $x + y = \frac{\pi R^2}{2}$

e $y + z = x + w = \frac{1}{8}\pi(2R)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$

Assim, $x + y = y + z = x + w$, logo $x = z$ e $y = w$.

Como se x é a área de um segmento circular de ângulo 90° e raio R, $x = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)R^2$ e $y = \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)R^2$. Assim $x = z < y = w$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Como a diferença entre o 17 e o 3 é 14, esses números devem estar em posições afastadas de 14 casas, contadas na horizontal ou vertical.
Portanto 17 e 3 devem ocupar as extremidades de uma das diagonais do tabuleiro.
A partir disso, o preenchimento das diagonais é feito de maneira única. E uma maneira de se preencher o tabuleiro é a seguinte:

17	16	15	14	13	12	11	10
16	15	14	13	12	11	10	9
15	14	13	12	11	10	9	8
14	13	12	11	10	9	8	7
13	12	11	10	9	8	7	6
12	11	10	9	8	7	6	5
11	10	9	8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5	4	3

a soma dos números escritos nas diagonais é: $8 \times 10 + (3 + 5 + ... + 17) = 160$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Observar que o posto do observador coincide com o centro do círculo circunscrito

No círculo circunscrito ao quadrilátero $ABCD$, temos $BCD = 2 \cdot B\hat{A}D = 90°$

Como $\overline{BD} = 16$, sendo O o centro do círculo circunscrito, temos $B\hat{O}D = 90°$ e $\overline{BO} = \overline{OD} = r$, donde $16^2 = r^2 + r^2$, pelo teorema de Pitágoras, e logo $r = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$. Assim, a distância do posto (que deve ficar em O) aos ninhos será de $8\sqrt{2}$ metros.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Os primeiros números da seqüência são (7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5...) donde vemos que exceto pelos 4 primeiros termos, a seqüência é periódica com período 3. Como 2002 deixa resto 1 quando dividido por 3 o número procurado coincide com aquele que ocupa o 7º. lugar na seqüência, a saber, 11.

Observação:

Para qualquer termo inicial, a seqüência construída de acordo com método descrito no enunciado do problema será eventualmente periódica, (isto é teremos $a_{n+k} = a_k$ para todo $k \geq m$, para certos valores positivos de m e n).

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6 :

a) Os palíndromos entre 2000 e 3000 são da forma 2*aa*2, onde a é um algarismo. Logo os próximos quatro serão 2112, 2222, 2332 e 2442.

b) Como o primeiro algarismo é igual ao último, um palíndromo ímpar maior que 2002 deve começar e terminar por um número ímpar maior ou igual a 3. Logo o próximo será 3003.

c) Um palíndromo de quatro algarismos é da forma $abba = a + 10b + 100b + 1000a = 1001a + 110b$, que é múltiplo de 11, já que 110 e 1001 são múltiplos de 11. Logo o próximo ano palíndromo primo tem no mínimo 5 algarismos. Os menores palíndromos de 5 algarismos são 10001, que é múltiplo de 73 e 10101, que é múltiplo de 3. O próximo é $10201 = 101^2$, divisível por 101. O seguinte, 10301, é primo, pois não é divisível por qualquer primo menor que $\sqrt{10301} < 102$.