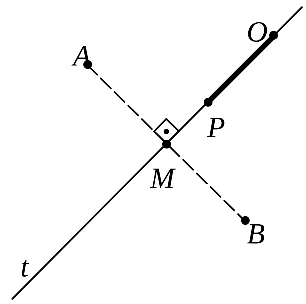
XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª ou 8ª Séries)

PROBLEMA 1:

No desenho ao lado, a reta t é perpendicular ao segmento AB e passa pelo seu ponto médio M. Dizemos que A é o simétrico de B em relação à reta t (ou em relação ao segmento PQ).



Seja XYZ um triângulo retângulo de área 1m^2. Considere o triângulo $X'Y'Z'$ tal que X' é o simétrico de X em relação ao lado YZ, Y' é o simétrico de Y em relação ao lado XZ e Z' é o simétrico de Z em relação ao lado XY.

Calcule a área do triângulo $X'Y'Z'$.

PROBLEMA 2:

Mostre que, entre dezoito inteiros consecutivos de três algarismos, sempre existe algum que é divisível pela soma de seus algarismos.

PROBLEMA 3:

São dados um tabuleiro quadriculado $m \times n$ e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.

Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

PROBLEMA 4:

Uma mistura possui os componentes A e B na razão 3 : 5, uma segunda mistura possui os componentes B e C na razão 1 : 2 e uma terceira mistura possui os componentes A e C na razão 2 : 3. Em que razão devemos combinar a 1ª, 2ª e 3ª misturas para que os componentes A, B e C apareçam na razão 3 : 5 : 2?

PROBLEMA 5:

Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência de centro O e P um ponto sobre o arco AB que não contém C. A perpendicular traçada por P à reta BO intersecta AB em S e BC em T. A perpendicular traçada por P a AO intersecta AB em Q e AC em R.

Prove as duas afirmações a seguir:

a) PQS é um triângulo isósceles

b) $PQ^2 = QR \cdot ST$

PROBLEMA 6:

Seja n um inteiro positivo. Definimos ¨ $(n) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdot n$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ são os fatores primos distintos de n. Prove que para todo $m \geq 1$, existe n tal que ¨ $(n) = m!$.

Obs: $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$.