CONTEÚDO

APRESENTAÇÃO

EUREKA!, a revista da Olimpíada Brasileira de Matemática faz parte de um grande projeto que tem como objetivo principal contribuir decisivamente para a melhoria de ensino de Matemática em nosso país.

O que planejamos realizar é descrito (de forma resumida), nesta apresentação.

DOS OBJETIVOS

O ensino de Matemática hoje no Brasil difere pouco do ensino praticado há 20 anos. A cada ano, livros novos são editados repetindo quase sempre o mesmo estilo e os mesmos conteúdos dos anteriores. Existem hoje no Brasil bons livros de Matemática dedicados aos alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Entretanto, o que lhes falta é um ingrediente que, no mundo de hoje, é fundamental: o estímulo à criatividade. Entendemos que não é suficiente para a formação do futuro cidadão um aprendizado burocrático da Matemática e percebemos a importância de estimular os alunos desde tenra idade a resolver problemas novos e desafiantes, propiciando o desenvolvimento da imaginação e da criatividade.

O programa de Olimpíadas de Matemática é reconhecido em todos os países do mundo desenvolvido como o mais eficiente instrumento para atingir esse objetivo. Aproveitando o natural gosto dos jovens pelas competições, as Olimpíadas de Matemática têm conseguido estimular alunos a estudar conteúdos além do currículo escolar e, também, por outro lado, aumentar e desenvolver a competência dos professores.

DO PROJETO

O programa de Olimpíadas de Matemática existe no país há 19 anos. Sempre foi pequeno e dedicado a encontrar jovens talentos para a Matemática ou para ciências afins e, neste aspecto, cumpriu sua finalidade. Temos hoje brilhantes matemáticos e cientistas de renome mundial que tiveram origem nas Olimpíadas de Matemática. Entretanto, reconhecemos que, com esta atividade, pode-se fazer muito mais. Com parceria do IMPA

(Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e com a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), foi submetido ao CNPq um projeto que pretende contribuir para a melhoria do ensino de Matemática no Brasil utilizando as Olimpíadas de Matemática como mecanismo propagador. Este projeto teve boa acolhida e neste momento estamos iniciando um trabalho de grandes dimensões que, para ter seus objetivos cumpridos, necessitará também (e principalmente) do apoio e da ajuda de diversos segmentos da sociedade: alunos, professores, escolas, universidades, secretarias de educação etc.

Nossa atividade estará centrada na resolução de problemas e atingirá alunos desde a 5ª. série do ensino fundamental até a 3ª. série do ensino médio e, naturalmente, seus professores. Para a divulgação deste material, utilizaremos esta revista, cartazes mensais com diversas informações sobre atividades olímpicas e um *site* na Internet.

Para movimentar os jovens realizar-se-à anualmente uma nova Olimpíada Brasileira de Matemática, que estará dividida em níveis de acordo com a escolaridade do aluno. Além disso, estaremos apoiando a realização de competições de Matemática em nível regional.

Para os professores, estão sendo planejados cursos de aperfeiçoamento em diversas regiões do país, também colocaremos à disposição, através do *site* da Internet, um vasto banco de problemas e uma biblioteca especializada localizados na nossa sede no IMPA.

DA REVISTA

EUREKA!, a revista da Olimpíada de Matemática é uma publicação dedicada principalmente aos alunos e professores da escola secundária a qual será editada quatro vezes ao ano e terá basicamente a seguinte estrutura:

a) Seção de problemas de treinamento com soluções, dividida, em três níveis: para os alunos de 5ª. e 6ª. séries, para os alunos de 7ª. e 8ª. séries e para os alunos de ensino médio. Esta seção pretende fornecer aos alunos material para estudo e pesquisa dirigidos à Olimpíada Brasileira, que será realizada nesses mesmos três níveis.

b) Seção de artigos de Matemática elementar, tratando de assuntos que complementem o currículo escolar e que também abordem novos conteúdos. Estes artigos estarão classificados em *iniciante, intermediário* ou *avançado*, de acordo com o estágio de desenvolvimento dos leitores aos quais se destinem os artigos.

c) Seção de Problemas de diversos níveis, sem solução, para que os leitores possam pesquisar e enviar suas soluções para a revista, sendo as melhores publicadas nos números seguintes.

d) Seção de Cartas dos Leitores, em que alunos e professores terão possibilidade de fazer quaisquer perguntas. Todas as cartas serão respondidas e as mais relevantes serão publicadas.

e) Agenda, para informarmos todas as atividades ligadas às Olimpíadas de Matemática no Brasil e no exterior.

DOS CARTAZES

Para que nossa atividade permaneça viva durante o ano, enviaremos todos os meses para as escolas cadastradas um cartaz da Olimpíada Brasileira de Matemática. Esse cartaz conterá todas as informações sobre as atividades olímpicas e também o *Problema do Mês,* em cada um dos três níveis. Contamos com que muitos alunos fiquem interessados nesse desafio e que nos enviem soluções.

Todos os colégios cadastrados receberão gratuitamente a revista EUREKA! e os cartazes mensais. Para cadastrar um colégio, basta entrar em contato conosco dando o nome do colégio, endereço completo e o nome de um professor responsável para receber a correspondência.

Rio de Janeiro, abril de 1998

A NOVA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

A Olimpíada Brasileira de Matemática será realizada a partir deste ano de 1998 de forma bastante diferente da que vinha sendo praticada nos últimos anos. Isto porque agora passa a atingir os alunos desde a 5ª. série do ensino fundamental. Antes, a Olimpíada Brasileira de Matemática era principalmente um instrumento para detectar talentos e desenvolvê-los, mas, agora, tem também por objetivo promover em âmbito nacional a melhoria do ensino de Matemática nas escolas, com o desenvolvimento conjunto de alunos e professores.

A Olimpíada Brasileira de Matemática, a partir deste ano, não será apenas uma competição. Para a preparação dos alunos e para o aperfeiçoamento dos professores, a OBM distribuirá aos colégios revistas e cartazes contendo farto material para estudo e pesquisa, dedicados a cada faixa de escolaridade e desenvolvimento dos alunos. A realização das provas é uma finalização (sempre parcial) dessa atividade.

A Olimpíada Brasileira de Matemática será realizada em três fases e em três níveis. São eles:

Nível 1 - para alunos da 5ª. e 6ª. séries do ensino fundamental.
Nível 2 - para alunos da 7ª. e 8ª. séries do ensino fundamental.
Nível 3 - para alunos do ensino médio (antigo 2º. grau).

Para cada um dos níveis, a OBM terá três fases. Na primeira, qualquer aluno interessado poderá participar. Para participar das outras, existirá um critério de promoção.

- A prova da primeira fase será de múltipla escolha, contendo de 20 a 25 questões sobre conteúdo adequado a cada um dos níveis de escolaridade. Nestas questões, serão incluídas algumas que dependam de alguma criatividade, porém não fugindo dos conteúdos tradicionais das escolas.

- A prova da segunda fase será discursiva e constará de 6 problemas, exigindo uma maior dose de iniciativa e criatividade.

- A prova da terceira fase será também discursiva.
- As provas da primeira e segunda fases da OBM serão realizadas nas escolas que desejarem participar dessa atividade. A correção

das provas também será realizada nas escolas, com o salutar envolvimento de seus professores, de acordo com critérios determinados pela organização. Os coordenadores oferecerão locais alternativos aos alunos que desejarem participar da Olimpíada, caso o colégio onde realizam seus estudos não venha a organizar a atividade.

- A prova da terceira fase será realizada em um local central designado pelo coordenador local e corrigida pelo comitê organizador da OBM.

Para tornar viável a realização de uma competição de Matemática em âmbito nacional, foi criada uma estrutura operativa. As atividades de elaboração das provas, edição da revista, publicação dos cartazes etc. serão centralizadas na Secretaria da Olimpíada Brasileira de Matemática, localizada no IMPA (Rio de Janeiro). Para apoiar as atividades no país, existem hoje cerca de 30 coordenadores regionais que darão assistência às escolas de sua área de atuação. Cada colégio participante da OBM ficará, portanto, ligado ao coordenador regional mais próximo, que fornecerá toda a assistência necessária.

Em 1998, a Olimpíada Brasileira de Matemática será realizada nas seguintes datas:

Primeira fase:	Sábado, 6 de junho
Segunda fase:	Sábado, 12 de setembro
Terceira fase:	Sábado, 24 de outubro (níveis 1, 2 e 3) e Domingo, 25 de outubro (nível 3)

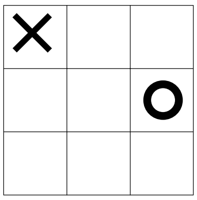
A Olimpíada Brasileira de Matemática não é de forma alguma uma competição entre colégios. Ela pretende essencialmente despertar nos alunos o gosto pelo estudo da Matemática através da resolução de problemas novos, estimulando o desenvolvimento da imaginação e da criatividade. O aspecto da competição naturalmente existe, mas jamais estará ligado a grupos, equipes, colégios, cidades ou regiões. Desejamos deixar bem claro que uma medalha oferecida pela Olimpíada Brasileira de Matemática é um reconhecimento ao esforço individual do aluno premiado, mas representa também o coroamento de um trabalho em que centenas ou milhares de anônimos alunos também se desenvolveram. E isto, no fundo, é o que importa.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Problemas de treinamento para a Primeira fase

Primeiro nível

1) Num quadrado formado por 9 quadrados menores e do mesmo tamanho, queremos escrever um X e um O, de forma que eles não fiquem vizinhos, isto é, os quadrados em que se encontram não podem ter um lado ou um vértice comum. O desenho abaixo mostra uma dessas possibilidades:



De quantas maneiras podemos localizar os dois sinais, respeitadas as condições apresentadas?

a) 32 b) 20 c) 64 d) 18 e) 12

2) Jacira consegue datilografar 20 páginas de um manuscrito em 4 horas e Joana o faz em 5 horas. Ainda restam 900 páginas do manuscrito para datilografar. Se as duas começarem a datilografar no mesmo instante essas páginas, quantas páginas deverá pegar a mais lenta, de forma que ambas terminem juntas?

a) 225 b) 500 c) 400 d) 450 e) 180

3) O professor Epaminondas, no primeiro dia de aula, apostou que, entre os alunos daquela classe, pelo menos dois fariam aniversário no mesmo dia do mês. O professor tinha certeza de que ganharia a aposta, pois naquela classe o número de alunos era maior ou igual a:

a) 15 b) 32 c) 28 d) 31 e) 30

4) *Seu* Pedro possui três lotes quadrados: um deles tem lado de 10 metros, e os outros dois têm lados de 20 metros cada. *Seu* Pedro quer trocar os três lotes por um outro lote quadrado, cuja área seja a soma das áreas daqueles três lotes. O novo lote deverá ter lado de medida:

a) impossível de obter b) 24 metros c) 25 metros
d) 40 metros e) 30 metros

5) Um jogo consiste em partir da casa 1 à casa 36 numa trilha com casas numeradas de 1 a 36. Os dois jogadores começam na casa 1 e o avanço de casas depende do lançamento de dois dados cúbicos comuns.

- Se a soma dos pontos for par, o jogador avança 3 casas.
- Se a soma dos pontos for ímpar, o jogador avança 1 casa.
- Se o jogador ultrapassar a última casa, retorna à casa 1.
- A ordem com que os jogadores iniciam suas jogadas é definida por alguma forma de sorteio.

Ganha quem parar primeiro na casa 36.
O menor número de jogadas que alguém pode fazer e ganhar é

a) 37 b) 13 c) 12 d) 14 e) 17

Segundo nível

1) A equação do 2°. grau $ax^2 + bx - 3 = 0$ tem -1 como uma de suas raízes. Sabendo que os coeficientes a e b são números primos positivos, podemos afirmar que $a^2 + b^2$ é igual a:

a) 29 b) 89 c) 17 d) 13 e) 53

2) Você já conhece o quadrado mágico de ordem 3: a soma dos números das linhas, das colunas e das diagonais é 15. A figura a seguir mostra uma das oito possibilidades de escrever os números no quadrado:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

O único número que não pode mudar de posição em todos esses quadrados mágicos é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

3) No modo SP, o aparelho de videocassete grava exatamente duas horas e, no modo EP, grava quatro horas de filme, com menor qualidade. Carlinhos quer gravar um filme de 136 minutos, com a melhor qualidade possível. Ele decidiu começar no modo EP e terminar no modo SP. Após quantos minutos de gravação no modo EP ele deve passar ao modo SP ?

a) 20 b) 16 c) 8 d) 32 e) 68

4) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 cm e pertencem ao interior de uma circunferência, da qual estão a uma distância de 1 cm. O raio da circunferência, em centímetros, é:

a) 5 b) 7 c) 2,5 d) 4,2 e) 3,5

5) Um número de dois algarismos não nulos é igual ao dobro do produto desses algarismos. Esse número pertence ao conjunto:

a) $\{11, 12, ..., 30\}$ b) $\{31, 32, ..., 50\}$
c) $\{51, 52, ..., 70\}$ d) $\{71, 72, ..., 90\}$
e) $\{91, 92, ..., 99\}$

Terceiro nível

1) Considere três circunferências concêntricas (mesmo centro T) de raios 1, 2 e 3, respectivamente. Considere um triângulo cujos vértices pertencem, um a cada uma das circunferências. Sabendo que o triângulo tem área máxima sob essas condições, podemos afirmar que, para este triângulo, o ponto T é o:

a) baricentro b) incentro c) circuncentro d) ortocentro
e) ex-incentro

2) Dada a função f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros) definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ \text{e} \\ x + 1 \text{ se } x \text{ é par,} \end{cases}$$

podemos afirmar que o número de soluções da equação
$f(x) = f(2x)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 0

3) Na seqüência de inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_k, …$, para $1 \le i \le k$, o termo a_i é o i-ésimo ímpar positivo; para $i > k$, o termo a_i é a média aritmética dos termos anteriores. Podemos concluir que a_{2k} é igual a:

a) k^2 b) k c) $2k$ d) 0 e) $\sqrt{k}$

4) Os vértices de um triângulo têm coordenadas (0,0), (3,1) e (1,7), respectivamente. As retas que passam pelos vértices e por um ponto T no interior do triângulo dividem-no em 6 triângulos de mesma área. Então:

a) T = (3,6) b) T = (2,4) c) T = (4/3, 8/3)
d) T = (2,8) e) T = (2/3, 4/3)

5) Para quantos valores reais de p a equação $x^3 - px^2 + px - 1 = 0$ tem todas as raízes reais e inteiras ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 ou mais

6) Considere o conjunto P dos pontos (x,y) do $\mathbb{R}^2$ tais que x e y sejam inteiros. Por exemplo, $(1,1) \in P$. Tome agora uma circunferência de diâmetro igual a 5, de forma que em seu interior haja o maior número possível de pontos de P. Esse número é:

a) 10 b) 16 c) 20 d) 14 e) 21

Nota: Veja as respostas na página 21.

Você sabia... que os antigos egípcios não usavam frações com numerador maior que 1 nem somavam frações iguais de numerador 1 ?
Assim por exemplo, eles se referiam ao número 2/5 como 1/3 + 1/15.
Veja o problema 9 na página 60.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Provas Júnior e Sênior 1997

♦ *Até o ano passado a Olimpíada Brasileira de Matemática era realizada em apenas dois níveis.*

PRIMEIRA FASE JÚNIOR

PROBLEMA 1

O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:

a)2 b) 3 c)6 d)7 e)9

PROBLEMA 2

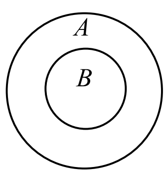
A fortuna de João foi dividida da seguinte forma: um quinto para seu irmão mais velho, um sexto do restante para seu irmão mais novo e partes iguais do restante para cada um de seus 12 filhos. Que fração da fortuna cada filho recebeu?

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{14}$

PROBLEMA 3

No alvo abaixo, uma certa pontuação é dada para a flecha que cai na região A e outra para a flecha que cai na região B. Alberto lançou 3 flechas: uma caiu em B e duas em A, e obteve 17 pontos. Carlos também lançou 3 flechas: uma caiu em A e duas em B, e obteve 22 pontos. Quantos pontos são atribuídos para uma flecha que cai na região A?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5 e) 6



PROBLEMA 4

Seja *f* uma função definida para todo *x* real, satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(x+3) = f(x) \cdot f(3) \end{cases}$$

Então, $f(-3)$ vale:

a)–6 b)0 c) $\frac{1}{2}$ d)2 e)–1

PROBLEMA 5

Quatro carros, de cores amarela, verde, azul e preta, estão em fila. Sabe-se que o carro que está imediatamente antes do carro azul é menor do que o que está imediatamente depois do carro azul; que o carro verde é o menor de todos; que o carro verde está depois do carro azul; e que o carro amarelo está depois do preto. O primeiro carro da fila:

a)é amarelo. b)é azul. c)é preto. d)é verde.
e) não pode ser determinado apenas com esses dados.

OBS: O primeiro da fila é o que vem <u>antes</u> de todos os outros.

PROBLEMA 6

64 jogadores de habilidades diferentes disputam um torneio de tênis. Na primeira rodada, são feitos 32 jogos (os emparelhamentos são por sorteio), e os perdedores são eliminados. Na segunda rodada, são feitos 16 jogos, os perdedores são eliminados, e assim por diante. Se os emparelhamentos são feitos por sorteio e não há surpresas (se *A* é melhor que *B*, *A* vence *B*), qual o número máximo de jogos que o décimo melhor jogador consegue jogar?

a)2 b)3 c)4 d)5 e)6

PROBLEMA 7

O número de pares (*x, y*) de reais que satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0 \\ x^3 - x^2 y - xy^2 + x - y + 2 = 0 \end{cases}$$ é igual a:

a)0 b)1 c)2 d)3 e)4

PROBLEMA 8

Seja $y = |x+2| + |x-1| + |x-3|$. Se $1 \le x < 2$, então y é igual a:

a)$x + 4$ b)$3x - 2$ c)$x - 4$ d)$3x + 2$ e)$x - 2$

PROBLEMA 9

Um gramado tem a forma de um quadrado com 10m de lado. Uma corda tem um dos extremos fixado em um dos vértices, e no outro extremo está amarrado um bode. Se o bode consegue comer metade da grama, então o comprimento da corda é de aproximadamente:

a)8m b)7,5m c)7m d)6,5m e)6m

PROBLEMA 10

Se p e q são inteiros positivos tais que $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$, o menor valor que q pode ter é:

a)6 b)7 c)25 d)30 e)60

PROBLEMA 11

A equação $\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{1-3x}$:

a) não tem solução.
b) tem uma única solução positiva.
c) tem uma única solução negativa.
d) tem duas soluções, uma positiva e outra negativa.
e) tem duas soluções, ambas negativas.

PROBLEMA 12

Como o médico me recomendou caminhadas, todo dia de manhã dou uma volta (com velocidade constante) na quadra em que resido. Minha mulher aproveita para correr (com velocidade constante) em volta do quarteirão. Saímos juntos e chegamos juntos. Ela percorre a quadra no mesmo sentido que eu e me ultrapassa duas vezes durante o percurso. Se ela corresse no sentido contrário ao meu, quantas vezes ela cruzaria comigo?

a)2 b)3 c)4 d)5 e)6

PROBLEMA 13

Em uma urna há 28 bolas azuis, 20 bolas verdes, 12 bolas amarelas, 10 bolas pretas e 8 bolas brancas. Qual é o número mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza de que sacaremos pelo menos 15 bolas da mesma cor?

a)58 b)59 c)60 d)71 e)72

PROBLEMA 14

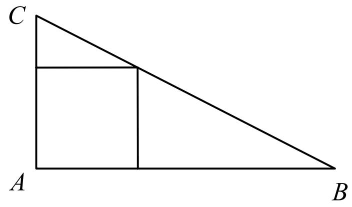
Um ladrilho, em forma de polígono regular, foi retirado do lugar que ocupava em um painel. Observou-se, então, que esse ladrilho, se sofresse uma rotação de 40^o ou de 60^0 em torno de seu centro, poderia ser encaixado perfeitamente no lugar que ficou vago no painel. O menor número de lados que pode ter esse ladrilho é:

a)6 b)9 c)12 d)15 e)18

PROBLEMA 15

No triângulo retângulo *ABC* da figura abaixo, está inscrito um quadrado. Se *AB* = 20 e *AC* = 5, que porcentagem a área do quadrado representa da área do triângulo *ABC*?

a) 25%
b) 30%
c) 32%
d) 36%
e) 40%



PROBLEMA 16

Em certo país, a unidade monetária é o pau. Há notas de 1 pau e moedas de meio pau, um terço de pau, um quarto de pau e um quinto de pau. Qual a maior quantia, em paus, que um cidadão pode ter em moedas sem que possa juntar algumas delas para formar exatamente um pau?

a) $\frac{11}{12}$ b) $1\frac{5}{12}$ c) $2\frac{7}{15}$ d) $2\frac{13}{60}$ e) $2\frac{43}{60}$

PROBLEMA 17

João e Pedro são vendedores e ganham R$ 1000,00 de salário e comissão de 8% sobre as vendas. Em setembro, João ganhou R$ 2000,00 e Pedro ganhou R$ 2 500,00. Nesse mês, as vendas de Pedro superaram as de João em:

a) 20% b) 25% c) 30% d) 40% e) 50%

PROBLEMA 18

Um triângulo ABC, de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, tem perímetro $2p$. Uma circunferência tangencia o lado BC e os prolongamentos dos lados AB e AC nos pontos P, Q e R, respectivamente. O comprimento AR é igual a:

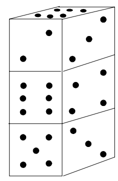
a) $p - a$ b) $p - b$ c) $p - c$ d) p e) $2p$

PROBLEMA 19

P é um ponto interior a um quadrado $ABCD$. As distâncias de P aos vértices A e D e ao lado BC são iguais a 10cm. O lado do quadrado mede:

a)10cm b)12cm c)14cm d)16cm e)18cm

PROBLEMA 20



A figura ao lado mostra três dados iguais. O número da face que é a base inferior da coluna de dados:
a) é 1.
b) é 2.
c) é 4.
d) é 6.
e) pode ser 1 ou 4.

PRIMEIRA FASE SÊNIOR (*)

(*) Na prova da primeira fase sênior apareceram os problemas 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 e 20 da primeira fase júnior.

PROBLEMA 1

Quantos são os pares não-ordenados de inteiros positivos tais que, em cada par, a soma do produto dos números do par com a soma dos números do par com o módulo da diferença dos números do par seja igual a 20?

a)1 b)2 c)3 d)4 e)5

PROBLEMA 2

O número de pares (x, y) de inteiros que satisfazem a equação
$x + y + xy = 120$ é:

a)1 b)2 c)3 d)4 e)6

PROBLEMA 3

O conjunto-solução da inequação $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-1}$ é o conjunto:

a) dos reais diferentes de 0 e de 1.
b) dos reais positivos diferentes de 1.
c) dos reais diferentes de zero e menores que 1.
d) dos reais entre 0 e 1.
e) vazio.

PROBLEMA 4

O número de valores inteiros de m para os quais as raízes da equação
$x^2 - (m + m^2)x + m^3 - 1 = 0$ são inteiras é igual a:

a)0 b)1 c)2 d)3 e)4

PROBLEMA 5

Os vértices de um decágono regular convexo *ABC...J* devem ser coloridos usando-se apenas as cores verde, amarela e azul. De quantos modos isso pode ser feito se vértices adjacentes não podem receber a mesma cor?

a)1022 b)1024 c)1026 d)1524 e)1536

PROBLEMA 6

Uma das soluções inteiras e positivas da equação $19x + 97y = 1997$ é, evidentemente, $(x_0, y_0) = (100,1)$. Além desse, há apenas mais um par de números inteiros e positivos, (x_1, y_1), satisfazendo a equação. O valor de x_1+y_1 é:

a)23 b)52 c)54 d)101 e)1997

PROBLEMA 7

Selecionam-se 3 vértices de um cubo. Qual é a probabilidade de eles pertencerem a uma mesma face?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{3}{7}$

PROBLEMA 8

Sendo k inteiro, o número de valores distintos de $sen\frac{k\pi}{9}$ é igual a:

a)5 b)8 c)9 d)10 e)18

PROBLEMA 9

Para cobrir um terraço em forma de um retângulo *ABCD*, usa-se uma placa plana de alumínio apoiada em quatro estacas verticais fixadas nos vértices do retângulo. A placa fica inclinada em relação ao chão para escoar a água das chuvas. Se as estacas que partem dos vértices *A, B* e *C* têm comprimentos respectivamente iguais a 3, 4 e 5 metros, o comprimento da que parte de *D* é:

a)3m b)4m c)5m d)6m e)8m

PROBLEMA 10

Se seu salário sobe 26% e os preços sobem 20%, de quanto aumenta o seu poder aquisitivo?

a)5% b)6% c)7% d)8% e)9%

PROBLEMA 11

O reservatório de um caminhão-tanque tem a forma de um cilindro de revolução com eixo horizontal e está cheio até $\frac{3}{4}$ da altura. A fração da capacidade total do resevatório que está ocupada é de aproximadamente:

a)80% b)75% c)68% d)60% e)56%

PROBLEMA 12

O preço de um estacionamento é formado por um valor fixo para as duas primeiras horas e um adicional por cada hora subseqüente. Se o estacionamento por 3 horas custa R$ 5,00 e por 5 horas custa R$ 6,00, quanto custa o estacionamento por 8 horas?

a)R$ 7,00 b)R$ 7,50 c)R$ 9,60 d)R$ 12,00
e)R$ 13,33

PROBLEMA 13

O número de soluções reais da equação $x^2 = 2^x$ é:

a)0 b)1 c)2 d)3 e)4

Você sabia... que π é aproximadamente:

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006 6...**?**

Respostas dos problemas de treinamento
Primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática.

Primeiro nível

1) a	**2) c**	**3) b**	**4) e**	**5) b**

Segundo nível

1) a	**2) c**	**3) d**	**4) e**	**5) b**

Terceiro nível

1) d	**2) a**	**3) b**	**4) c**	**5) b**	**6) e**

RESPOSTAS DA PRIMEIRA FASE -OBM JÚNIOR- 1997

1) d	**8) a**	**15) c**
2) b	**9) a**	**16) d**
3) c	**10) b**	**17) e**
4) c	**11) e**	**18) d**
5) c	**12) c**	**19) d**
6) e	**13) b**	**20) c**
7) c	**14) e**	

RESPOSTAS DA PRIMEIRA FASE -OBM SÊNIOR- 1997

1) b	**6) a**	**11) a**
2) e	**7) e**	**12) b**
3) d	**8) c**	**13) d**
4) c	**9) b**	
5) c	**10) a**	

Você sabia que o erro da aproximação de π por 355/113 é menor que 3×10^{-7}?

A OLIMPÍADA DE MAIO

Introdução

A Federação Iberoamericana de Competições de Matemática organizou pela primeira vez a Olimpíada de Maio no ano de 1995.

A competição está dividida em dois níveis: estudantes menores de 13 anos e estudantes menores de 15 anos. O concurso se realiza por correspondência e está baseado no modelo que segue a Olimpíada de Matemática do Pacífico (APMO), concurso de longa distância com grande tradição.

En maio deste ano se realizará a IV Olimpíada de maio, seguindo o calendário seguinte:

• Limite para o envio dos problemas.	31 de janeiro
• Envio dos enunciados das provas aos delegados de cada país:	11 de abril
• **Prova:**	**09 de maio, 14h**
• Limite da chegada dos listados e provas para cada país:	13 de junho
• Envio dos resultados e diplomas de honra aos delegados de cada país:	27 de junho

A seguir apresentamos as provas da III Olimpíada de Maio, realizada em maio de 1997, com as respectivas soluções.

III OLIMPÍADA DE MAIO

Primeiro nível

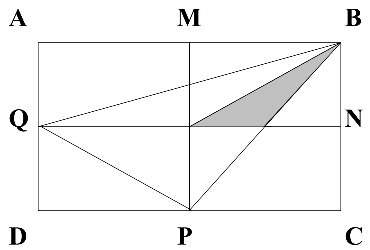
Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular.
Não se pode consultar livros nem notas.

1) Num tabuleiro quadrado de 9 casas (de três por três), deve-se colocar nove elementos do conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9\}$, distintos um do outro, de modo que cada um deles fique numa casa e se verifiquem as seguintes condições:

- As somas dos números da segunda e terceira fileira sejam, respectivamente, o dobro e o triplo da soma dos números da primeira fileira.
- As somas dos números da segunda e terceira coluna sejam, respectivamente, o dobro e o triplo da soma dos números da primeira coluna.

Mostre todas as formas possíveis de colocar elementos de *S* no tabuleiro,cumprindo com as condições indicadas.

2)



No retângulo *ABCD, M, N, P* e *Q* são os pontos médios dos lados. Se a área do triângulo sombreado é 1, calcular a área do retângulo *ABCD.*

3) Num tabuleiro de 8 por 8, colocam-se 10 fichas que ocupam, cada uma, uma casa. Em cada casa sem ficha está escrito um número entre 0 e 8, que é igual à quantidade de fichas colocadas nas casas vizinhas. Casas vizinhas são as que têm um lado ou um vértice em comum.Mostre uma distribuição das fichas que faça que a soma dos números escritos no tabuleiro seja a maior possível.

4) Joaquín e seu irmão Andrés vão todos os dias para a aula no ônibus da linha 62. Joaquín paga sempre as passagens.

Cada passagem tem impresso um número de 5 dígitos. Um dia, Joaquín observa que os números das passagens, além de consecutivos, são tais que a soma dos dez dígitos é precisamente 62.

Andrés pergunta para ele se a soma dos dígitos de algum dos boletos é 35 e, ao saber a resposta, pôde dizer corretamente o número de cada boleto.

Quais são estes números?

5) Quando Pablo fez 15 anos, fez uma festa convidando 43 amigos. Ele tem uma torta com forma de polígono regular de 15 lados e sobre ela coloca 15 velas.

As velas são colocadas de modo que entre velas e vértices nunca há três alinhados (três velas quaisquer não estão alinhadas, nem duas velas quaisquer com um vértice do polígono, nem dois vértices quaisquer do polígono com uma vela).

Logo depois, Pablo divide a torta em pedaços triangulares, mediante cortes que unem velas entre si ou velas e vértices, mas nunca se cruzam com outros já realizados. Por que, ao fazer isto, Pablo consegue distribuir um pedaço para cada um de seus amigos mas ele fica sem comer?

SOLUÇÕES

1) Nas condições do problema, a soma de todos os elementos do quadrado deve ser um múltiplo de 6. Como 0 + 1 +2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, que deixa resto 3 quando dividido por 6, as únicas possibilidades para o conjunto dos números que aparecem no quadrado são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (note que retiramos respectivamente 3 e 9 que são os elementos que deixam resto 3 quando divididos por 6). No primeiro caso a soma dos elementos da primeira linha (e da primeira coluna) deve ser :

$6 = \dfrac{45-9}{6}$ E no segundo: $7 = \dfrac{45-3}{6}$

No primeiro caso, as possibilidades para o conjunto resp. C_1 elementos da primeira linha (resp. da primeira coluna) são: {0,1,5}, {0,2,4} e {1,2,3}

1.a) Se L_1 = {0,1,5} e C_1 = {0,2,4}, temos a única solução

$\begin{pmatrix} 015 \\ 236 \\ 487 \end{pmatrix}$, e, por simetria, se L_1 = {0,2,4} e C_1 = {0,1,5}, temos $\begin{pmatrix} 024 \\ 138 \\ 567 \end{pmatrix}$

a) Se L_1 {0,1,5} e C_1 = {1,2,3} ou L_1 = {1,2,3} e C_1 = {0,1,5}, temos

$\begin{pmatrix} 105 \\ 246 \\ 387 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 123 \\ 048 \\ 567 \end{pmatrix}$

b) Se L_1 = {0,2,4} e C_1 = {1,2,3} ou L_1 = {1,2,3} e C_1 = {0,1,5}, temos

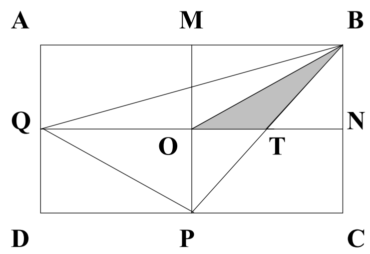
$$\begin{pmatrix} 204 \\ 156 \\ 378 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 213 \\ 057 \\ 468 \end{pmatrix}$$

No segundo caso, as possibilidades para L_1 (ou C_1) são {0,1,6}, {0,2,5} e {1,2,4} (não pode aparecer o 3).

Para cada escolha de L_1 e C_1 temos uma única possibilidade de solução, e as soluções são:

$$\begin{pmatrix} 016 \\ 248 \\ 597 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 025 \\ 149 \\ 687 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 106 \\ 257 \\ 498 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 124 \\ 059 \\ 678 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 205 \\ 167 \\ 489 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 214 \\ 068 \\ 579 \end{pmatrix}$$

2)



Sejam O o centro do retângulo e T a interseção de ON com BP. Os triângulos ΔOTP e ΔOTB são de áreas iguais, pois têm a mesma base e igual altura (OP = NB). Como T é o ponto médio, os triângulos ΔOTP e ΔNTB são iguais, ambos são de área 1.Então, a área do ΔOTP é 2 e, como é a metade da área de ONB, a área de $ABCD$ é 16.

3)

Cada ficha soma 1 em cada uma das casas vizinhas que estão livres de ficha. Uma casa tem como máximo 8 vizinhas (perde vizinhas se está numa borda do tabuleiro). Vejamos que é impossível colocar as 10 fichas em 10 casas isoladas, tais que nenhuma fique na borda do tabuleiro. Podemos pensar que temos um tabuleiro de 6 por 6 –pois as casas das bordas não interessam– ou dividimos em 9 setores 2 por 2, mediante paralelas aos lados. Se queremos selecionar casas isoladas, em cada setor podemos escolher ao máximo 1. São, em total, no máximo 9 casas isoladas.

Se uma casa fica na borda do tabuleiro, terá como máximo 5 vizinhas. Ou seja ao colocar uma ficha ali, somará no máximo 5. Por outro lado, podem-se colocar 8 fichas isoladas mais 2 nas quais as casas se toquem num vértice; neste caso se perde só uma casa vizinha por cada uma delas. A soma total é: $8 \times 8 + 2 \times 7 = 78$. Duas possíveis distribuições são as seguintes:

1	1	2	1	2	1	1	0
1	*	2	*	2	*	1	0
2	2	4	2	4	2	2	0
1	*	2	*	2	*	1	0
2	2	4	2	4	2	2	0
1	*	2	*	2	*	2	1
1	1	2	1	2	2	*	1
0	0	0	0	0	1	1	1

0	1	1	2	1	2	1	1
0	1	*	2	*	2	*	1
1	2	3	3	3	3	2	1
1	*	2	*	2	*	1	0
1	2	3	3	3	3	2	1
1	2	*	2	*	2	*	1
1	*	2	2	1	2	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

4) Se o número menor é *abcde*, *e* deve ser 9, pois caso contrário o maior seria *abcd* $(e + 1)$, e a soma dos dez dígitos é $2(a + b + c + d + e) + 1$, que é ímpar e não poderia ser nunca 62.

Além disso, se o número menor acaba num número par de noves (99 ou 9999), a soma dos dez dígitos também seria um número ímpar.

Assim, o número menor é *abcd*9 (d não é 9) ou *ab*999 (b não é 9).

No primeiro caso, o outro número será $abc(d + 1)0$, e a soma dos dez dígitos $2(a + b + c + d) + 10 = 62$, ou seja, $a + b + c + d = 26$, e os dígitos do número menor somam $a + b + c + d + 9 = 35$. Haveria mais de um número de cinco dígitos nessas condições 85859, 77669, etc.,) pelo que a resposta que deu Joaquín à pergunta do seu irmão foi "não". Assim, os números serão:

$ab999$ e $a(b + 1)000$, a soma dos dez dígitos é $2(a + b) + 28 = 62$; assim: $a + b = 17$, e como b não é 9, $a = 9$ e $b = 8$.

Os números dos boletos são: 98999 e 99000

5) Seja n o número de triângulos em que se pode dividir a torta com as condições dadas.

Somaremos os ângulos interiores destes n triângulos de duas formas:

(1) $180°\, n$
(2) $360° \times 15 + 180°\,(15 - 2)$

Cada ponto interior (vela) contribui com 360°, e a soma dos ângulos interiores de um polígono convexo de L lados, é $180°\,(L - 2)$.
Portanto: $180°\, n = 360° \times 15 + 180° \times 13$, onde $n = 43$.
Também pode utilizar-se a relação de Euler de um mapa plano:
$R + V = L + 1$ (R = regiões, V = vértices e L = lados).
Então $V = 30$, $3R = 2L - 15$ (Todos os lados são comuns a duas regiões, exceto os 15 lados do contorno do polígono). Assim, pois:

$$\frac{2L - 15}{3} + 30 = L + 1 \qquad \text{Portanto: } L = 72 \text{ e } R = 43$$

Você sabi@

que a página web da Olimpíada Brasileira de Matemática é

http://www.obm.org.br

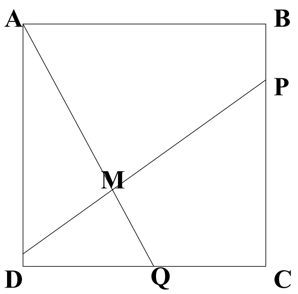
III OLIMPÍADA DE MAIO

Segundo nível

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular.
Não se pode consultar livros nem notas.

1) Quantos são os números de sete algarismos que são múltiplos de 388 e terminam em 388?

2)



Em um quadrado $ABCD$ de lado k, colocam-se os pontos P e Q sobre os lados BC e CD, respectivamente, de forma que $PC = 3PB$ e $QD = 2QC$. Sendo M o ponto de interseção de AQ e PD, determine a área do triângulo QMD em função de k.

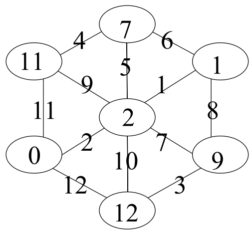
3) Temos 10000 fichas iguais com a forma de um triângulo equilátero. Com esses pequenos triângulos se podem formar hexágonos regulares sem superposições de fichas ou vazios.

Considere agora o hexágono regular que desperdiça a menor quantidade possível de triângulos. Quantos triângulos sobram?

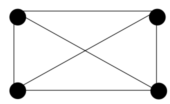
4) Nas figuras, assinalam-se os vértices com um círculo. Chamam-se *caminhos* aos segmentos que unem os vértices. Distribuem-se números inteiros não negativos nos vértices, e nos caminhos se assinalam as diferenças entre os números de seus extremos.

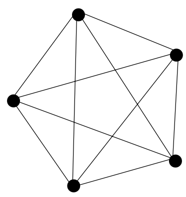
Diremos que uma distribuição é *elegante* se aparecem nos caminhos todos os números de 1 a n, em que n é o número de caminhos.

Veja um exemplo de distribuição *elegante:*



Dar –se possível– uma distribuição elegante para as seguintes figuras. Em caso de não ser possível, mostrar por quê.





5) Quais são as possíveis áreas de um hexágono com todos os ângulos iguais e cujos lados medem 1,2,3,4,5 e 6 em alguma ordem?

SOLUÇÕES

1)

Solução A

O número se expressa como: $n.\ 10^3 + 388$, em que n é um número de quatro cifras.

$n.\ 10^3 + 388 = k.\ 388.$
$n.\ 10^3 = (k-1).388.$
Mas $388 = 2^2.97$, então o número n de quatro cifras deve ser múltiplo de 97.

$N = t.97$, com $11 \le t \le 103$. São 93 números.

<u>*Solução B*</u>

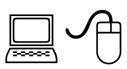
Para que um número multiplicado por 388 termine em 388, as últimas cifras devem ser 001, 501, 251 ou 751.

O menor múltiplo de 388 que tem sete cifras é $388 \cdot 2578$, e o maior é $388 \cdot 25773$.
Entre 2578 e 25773 temos:

23 números terminados en 001, desde 3001 até 25001
23 números terminados en 501, desde 3501 até 25501
23 números terminados en 251, desde 3251 até 25251
24 números terminados en 751, desde 2751 até 25751

São em total: $23 + 23 + 23 + 24 = 93$

Você sabia que o maior número primo conhecido é $\mathbf{2^{3021377} - 1}$*, que tem* **909529** *dígitos e foi descoberto com a ajuda de um computador pessoal?*



Consulte na Internet a página

http://www.mersenne.org/prime.htm

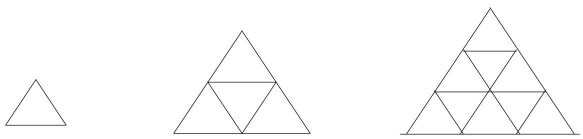
2) Sejam $D = (0,0)$, $C = (k,0)$, $B = (k,k)$ e $A = (0,k)$, temos $P = \left(k, \frac{3k}{4}\right)$ e $Q = \left(\frac{2k}{3}, 0\right)$

A equação de PD é $y = \frac{3}{4}x$, e de AQ é $y = k\frac{3}{2}x$. Se $M = (x_0, y_0)$, temos $\frac{3}{4}x_0 = k - \frac{3}{2}x_0 \Rightarrow \frac{9}{4}x_0 = k \Rightarrow x_0 = \frac{4k}{9} \Rightarrow y_0 = \frac{3}{4}x_0 = \frac{k}{3}$, que é a altura de M em relação a BQ, donde a área do ΔQMD é $\frac{DQ \cdot (k/3)}{2} = \frac{(2k/3)(k/3)}{2} = \frac{k_2}{9}$

3)

Um hexágono é a união de 6 triângulos equiláteros iguais. Cada um destes triângulos, se tem lado n, decompõe-se em n^2 triângulos pequenos.

Lado 1	1 triângulo pequeno
Lado 2	4 triângulos pequenos
Lado 3	9 triângulos pequenos
Lado n	n^2 triângulos pequenos

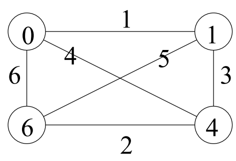


O hexágono de lado n contem $6n^2$ destes triângulos pequenos.

Busca-se o maior n tais que $6n^2 \leq 10000 \Rightarrow n = \left[\frac{100}{\sqrt{6}}\right] = 40$

Usam-se 6×40^2 triângulos pequenos. Perdem-se $400 = (1000 - 6 \times 40^2)$ triângulos.

4)



No segundo caso, não é possível, pois devem aparecer nas arestas os números 1,2,3,…,10 (5 pares e 5 ímpares).

Se quatro ou cinco vértices recebem números com a mesma paridade, temos pelo menos 6 arestas pares, portanto a numeração não será elegante. Nos outros casos, teríamos seis arestas ímpares.

5) Sejam x, y, z, u, v, w os lados consecutivos do hexágono. Prolongamos os lados y, u e w e obtemos um triângulo equilátero. A área é igual à área deste triângulo equilátero menos as áreas de três triângulos equiláteros de lados x, z e v.

Área do hexágono: $\frac{\sqrt{3}}{4}\left((x+y+z)^2 - x^2 - v^2 - z^2\right)$

Vejamos quais são os possíveis valores de x, y, z, u, v, w.

Seja $x = 1$, temos $w + x + v = y + x + z$
$w + x + v = v + u + z$ (pois o triângulo de fora é equilátero)

Donde temos

$$w + v = y + z$$
$$w + x = u + z$$

E temos $v + x = y - u$. Não pode ser $v - x = 5$, porque os únicos dois números que têm diferença 5 são 1 e 6.

- Se $v - x = 4$, temos $v = 5$, $y = 6$, $u = 2$.
  De $w + 6 = z + 7$, resulta, além disso, $w = 4$, $z = 3$.

- Se $v - x = 3$, então $v = 4$. Pode ser $y = 5$, $u = 2$ ou $y = 6$, $u = 3$.
  O primeiro caso é impossível, porque não quedam valores de w, z tais que $w + 5 = z + 7$. O segundo também é impossível, pois não restam valores de w, z tais que $w + 4 = z + 6$

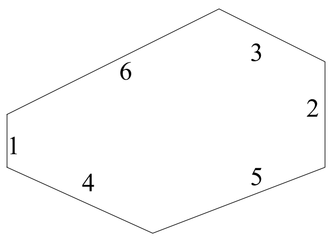
- Se $v - x = 2$, temos $v = 3$ e pode ser $y = 6$, $u = 4$ ou $y = 4$, $u = 2$
  No primeiro caso, $w + 4 = z + 7$, donde $w = 5$, $z = 2$.

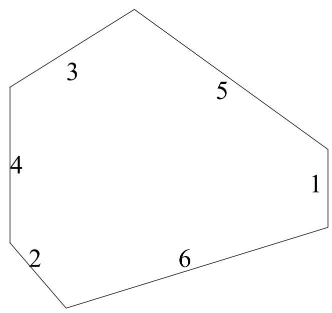
- Se $v - x = 1$, temos $v = 2$ e pode ser $y = 4$, $u = 3$ ou $y = 5$, $u = 4$ ou $y = 6$, $u = 5$.
  O primeiro e terceiro casos são impossíveis.
  No segundo caso, $w + 3 = 6 + z$, onde $w = 6$, $z = 3$.

  Os possíveis valores da área são: $\frac{\sqrt{3}}{4}(100 - 1 - 25 - 9) = 65\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

  $$\frac{\sqrt{3}}{4}(81 - 1 - 4 - 9) = 67\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Os hexágonos são:





9ª. OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Salvador - BA, 13 a 21 de junho de 1998

A 9ª. Olimpíada de Matemática dos países do Cone Sul será realizada em Salvador, BA, no período de 13 a 21 de junho de 1998. Esta Olimpíada será realizada pela segunda vez no país (a primeira foi em 1993, em Petrópolis, RJ). Dela participam alunos de até 15 anos dos seguintes países: Argentina, Brasil, Bolívia, Chile, Paraguai, Peru e Uruguai. A organização da Olimpíada está a cargo da Professora Luzinalva Amorim, da Universidade Federal da Bahia.

A equipe brasileira será selecionada através de provas realizadas em março e maio deste ano e será liderada pelos professores Paulo Cezar Pinto Carvalho, do IMPA, e Florêncio Ferreira Guimarães, da UFES.

A competição consta de duas provas, realizadas em dois dias, cada uma com três problemas, valendo 10 pontos cada. Veja abaixo as provas da última Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Assunção (Paraguai), em 1997, e os resultados obtidos pela equipe brasileira.

Você sabi@ que a
Olimpíada Brasileira de Matemática
já tem página web??

Visite-nos no endereço eletrônico http://www.obm.org.br

8ª. OLIMPÍADA DO CONE SUL

21 a 25 de Abril de 1997. Assunção, Paraguai.

Primeiro dia.
Tempo: três horas.

PROBLEMA 1

De cada número inteiro positivo n, $n \leq 99$, subtraímos a soma dos quadrados de seus algarismos. Para que valores de n esta diferença é a maior possível?

PROBLEMA 2

Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B. Seja P a interseção da perpendicular traçada por O a AR. Sobre a reta OP se marca o ponto Q, de maneira que QP é a metade de PO e Q não pertence ao segmento OP. Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta AR em T.
Chamamos de H o ponto de interseção das retas AQ e OT. Provar que H, R e B são colineares.

PROBLEMA 3

Demonstrar que existem infinitos ternos (a, b, c), com a, b, c números naturais, que satisfazem a relação: $2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 1997$.

Segundo dia.
Tempo: três horas.

PROBLEMA 4

Considere um tabuleiro de n linhas e 4 colunas.
Na 1ª. linha são escritos 4 zeros (um em cada casa). A seguir, cada linha é obtida a partir da linha anterior realizando a seguinte operação: uma das casas, a escolher, é mantida como na linha anterior; as outras três são tro-

cadas: se na linha anterior havia um 0, coloca-se 1; se havia 1, coloca-se 2; e se havia 2, coloca-se 0.
Construa o maior tabuleiro possível com todas as suas linhas distintas e demonstre que é impossível construir um maior.

PROBLEMA 5

Seja n um número natural, $n > 3$.
Demonstrar que entre os múltiplos de 9 menores que 10^n há mais números com a soma de seus dígitos igual a $9(n\text{-}2)$ que números com a soma de seus dígitos igual a $9(n\text{-}1)$.

PROBLEMA 6

Considere un triângulo acutângulo ABC, e seja X um ponto do plano do triângulo.

Sejam M, N e P as projeções ortogonais de X sobre as retas que contêm as alturas do triângulo ABC. Determinar para que posições de X o triângulo MNP é congruente a ABC.

Nota: a projeção ortogonal de um ponto X sobre uma reta l é a interseção de l com a perpendicular a ela que passa por X.

RESULTADOS OBTIDOS PELA EQUIPE BRASILEIRA

BRA 1	**Murali Srinivasan Vajapeyam**	**OURO**
BRA 2	**Rui Lopes Viana Filho**	**OURO**
BRA 3	**Christian Iveson**	**BRONZE**
BRA 4	**Daniele Véras de Andrade**	**BRONZE**

NÚMEROS MÁGICOS E CONTAS DE DIVIDIR

Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

♦ Nível Iniciante.

Temas muito inocentes de aritmética básica, como contas de multiplicar, podem gerar resultados bastante interessantes e surprendentes, como ao multiplicar o número 142857 por 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

$142857 \times 2 = 285714$
$142857 \times 3 = 428571$
$142857 \times 4 = 571428$
$142857 \times 5 = 714285$
$142857 \times 6 = 857142$

Por que razão acontece essa repetição dos dígitos de 142857 ao multiplicá-lo por 2, 3, 4, 5 e 6, sempre com a mesma ordem circular? Será mera coincidência? Será possível obter outros exemplos desse tipo?
A resposta tem a ver com o resultado de 142857×7, que é 999999. Isso quer dizer que o período da representação decimal de 1/7 é exatamente 142857. Vamos examinar com cuidado a conta de divisão de 1 por 7:

```
10        |_7_____
 30        0,142857
  20
   60
    40
     50
      1
```

repetindo o resto 1, o que quer dizer que todo o processo se repete e o resultado da divisão é 1/7 = 0,142857142857142857…
Podemos reescrever o processo assim:

$1 = 0 \times 7 + 1$
$10 = 1 \times 7 + 3$
$30 = 4 \times 7 + 2$
$20 = 2 \times 7 + 6$
$60 = 8 \times 7 + 4$
$40 = 5 \times 7 + 5$

$50 \quad = 7 \times 7 + 1.$ Daí temos:
$10 - 7 \times 1 = 3$, e portanto $100 - 7 \times 10 = 30$, e como $30 - 7 \times 4 = 2$ temos:
$100 - 7\,(10 + 4) = 2$, e analogamente obtemos:
$1000 - 7\,(100 + 40 + 2) = 6$
$10000 - 7\,(1000 + 400 + 20 + 8) = 4$
$100000 - 7\,(10000 + 4000 + 200 + 80 + 5) = 5$
$1000000 - 7\,(100000 + 40000 + 2000 + 800 + 50 + 7) = 1$

(A última igualdade diz que $142857 \times 7 = 999999$)

Desta forma, os restos sucessivos que aparecem na divisão de 1 por 7, que são 3, 2, 6, 4, 5, 1 são, respectivamente, os restos na divisão por 7 de 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000. Estes restos assumem todos os valores possíveis entre 1 e 6 e isso equivale ao fato de o período de 1/7 ter 6 casas. Desta forma, temos:

$2 \times 0{,}142857142857142857\ldots = 2/7 = 100/7 - 14 = 100 \times 0{,}142857142857142857\ldots - 14 = 0{,}285714285714285714\ldots$, e, portanto, temos $2 \times 142857 = 285714$

Da mesma maneira temos que $3/7 = 10/7 - 1$ implica $3 \times 142857 = 428571$, e as outras igualdades seguem de modo análogo.

Notemos agora que sempre que o período da representação decimal de 1/n tiver $n - 1$ casas decimais (que é o máximo possível), o período (que será igual a $(10^{n-1} - 1) / n$) terá as mesmas propiedades de 142857. O primeiro valor de n maior que 7 para o qual isso acontece é 17, e o período de 1/17 é 0588235294117647. Multiplique esse número por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 para conferir.

Observe que, para que isso aconteça, n deve ser um número primo, pois se $n = p \times b$, com b maior que 1 e p um número primo diferente de 2 e 5, então p nunca aparecerá como resto na divisão de 1 por n, pois em geral um fator primo comum de n e de um resto que aparece na divisão de 1 por n só pode ser 2 ou 5 (de fato, um resto que aparece na divisão de 1 por n é resto da divisão de alguma potência de 10 por n). Por outro lado, se os únicos fatores primos de n são 2 e 5, então $1/n$ tem representação decimal finita.

Conclusão: Se o período de $1/n$ tiver $n-1$ casas decimais, ele terá propiedades análogas às de 142857: os dígitos de seus produtos por 1, 2, 3, 4, …, $n-1$ serão sempre os mesmos, na mesma ordem circular. Para que isso aconteça, n deve ser primo e a menor potência de 10 que deixa resto 1 quando dividida por n deve ser 10^{n-1}. Dizemos que, nesse caso, 10 é raiz primitiva módulo n. Não se sabe se existem infinitos primos n com essa propriedade. Isso seguiria de uma famosa conjectura de teoria dos números, a conjectura de Artin (vide [V]).

Os números primos n menores que 100 tais que o período de $1/n$ na base 10 tem $n-1$ casas são 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61 e 97.

Por outro lado, para todo número primo n existem números naturais B entre 2 e $n - 1$ tais que o período de $1/n$ na base B tem exatamente $n - 1$ casas (nesses casos B é raiz primitiva módulo n). Se um número B tem essa propriedade, todas as bases da forma $kn + B$ com k natural também têm. Nesses casos, o período de $1/n$ na base B (ou seja, o número $(B^{n-1}-1)/n$), quando multiplicado por 1, 2, 3, …, $n - 1$ terá representações na base B que serão permutações uma da outra com a mesma ordem circular.

Por exemplo, com $n = 5$ e $B = 8$, temos que a representação de 1/5 na base 8 é 0,146314631463… Na base 8 temos:
$2 \times (1463)_8 = (3146)_8$, $3 \times (1463)_8 = (4631)_8$,
$4 \times (1463)_8 = (6314)_8$, $5 \times (1463)_8 = (7777)_8$

Referências:

[L] Lima, Elon L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, pp. 158-170 – SBM, 1991.
[T] Tahan, Malba, *O homen que calculava*, Ed. Record.
[V] Voloch, José Felipe, *Raizes Primitivas e a Conjectura de Artin*, Revista Matemática Universitária Nº9/10, dezembro de 1989, pp. 153-158.

COMO PERDER AMIGOS E ENGANAR PESSOAS

Nicolau C. Saldanha

♦ Nível Avançado.

Neste artigo apresentaremos quatro situações simples em que probabilidades enganam. Em alguns casos a probabilidade de certos eventos tem um valor diferente daquele que a maioria das pessoas parece julgar razoável, pelo menos de início; em um exemplo mostraremos como é facil chegar a conclusões absurdas. Para que o leitor possa pensar sozinho, apresentaremos primeiro quatro "enunciados", em que lançamos cada situação, e depois quatro "desenvolvimentos" em que voltamos a discutir as quatro situações na mesma ordem. Qualquer um pode usar estes exemplos para divertir-se às custas de seus amigos, mas em nenhum caso o autor tem responsabilidade pela integridade física daqueles que usarem a Matemática para o mal.

ENUNCIADOS

1. Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta; devemos supor neste problema que o convidado prefere ganhar o carro. O procedimento para escolha da porta é o seguinte: o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Que estratégia deve o convidado adotar? Com uma boa estratégia, que probabilidade tem o convidado de ganhar o carro?

2. Um móvel tem três gavetas iguais. Em uma gaveta há duas bolas brancas, em outra há duas bolas pretas, e na terceira há uma bola branca e outra preta. Abrimos uma gaveta ao acaso e tiramos uma bola ao acaso sem olhar a segunda bola que está na gaveta. A bola que tiramos é branca. Qual é a probabilidade de que a segunda bola que ficou sozinha na gaveta seja também branca?

3. Dois amigos querem decidir quem pagará a conta do restaurante com uma aposta. Cada um deles escolhe uma seqüência de três caras ou coroas, e eles jogam uma moeda até que saia uma das duas seqüências: aquele que tiver escolhido a primeira seqüência a sair ganhou a aposta. Por exemplo, André (por ser o primeiro em ordem alfabética) é o primeiro a escolher e fica com a seqüência **ckc** (em que **c** representa cara e **k** coroa) enquanto Bernardo responde com **cck**. Eles jogam a moeda obtendo **kckkckkkkcccк,** e neste momento Bernardo declara-se o vencedor. Esta aposta é justa? André leva vantagem ou desvantagem por ser o primeiro a escolher? Quais são as probabilidades de vitória de cada um?

4. Aqui novamente devemos nos imaginar em um programa de auditório. Eugênio foi sorteado e tem direito a um prêmio, mas ele deve escolher entre dois envelopes lacrados aparentemente iguais. O apresentador informa que cada envelope tem um cheque e que o valor de um cheque é o dobro do outro, mas não diz nada sobre o valor dos cheques, nem indica qual envelope contém o cheque de maior valor. Eugênio escolhe e abre um envelope que contém um cheque de, digamos, R$ 100. Neste momento, o apresentador sempre faz uma proposta ao convidado: ele pode trocar de envelope mediante uma *multa* de 5% do valor do cheque que ele tem em mãos, no caso, R$ 5. Assim, se Eugênio aceitar, ele pode ganhar R$ 45 (se o cheque no segundo envelope for de R$ 50) ou R$ 195 (se o outro cheque for de R$ 200). Suponhamos que Eugênio (que fez um curso de Introdução à Probabilidade no período anterior) queira maximizar o valor esperado de seu prêmio. Deve ele aceitar a troca? E se o valor do primeiro cheque tivesse sido outro, de que forma deveria isto influenciar a decisão de Eugênio? Se Eugênio trocar de envelope independentemente do valor do cheque, não vale mais a pena para ele trocar de envelope antes de abrir, evitando, assim, a multa?

DESENVOLVIMENTOS

1. A resposta correta é que, trocando de porta, a probabilidade de ganhar o carro é 2/3, enquanto não trocando a probabilidade é apenas 1/3. Uma forma simples de ver isto é a seguinte: trocando de porta, o convidado ganha, desde que a primeira porta que ele escolher esconda um dos dois bodes, como se pode facilmente perceber. A melhor estratégia para o convidado é, portanto, trocar sempre, e assim sua probabilidade de ganhar fica sendo 2/3.

O erro comum aqui é achar que, após a eliminação de uma porta (que foi aberta pelo apresentador, revelando um bode), há uma simetria entre as duas outras portas e a probabilidade de cada uma esconder o carro é 1/2. Não existe, entretanto, tal simetria, pois a porta escolhida pelo convidado não poderia, pelas regras, ser trocada pelo apresentador, enquanto a outra *poderia* ter sido aberta, mas não foi.

Este processo de fato era seguido em um programa nos Estados Unidos. Uma longa e áspera discussão ocorreu na imprensa quanto a qual era o valor correto da probabilidade, e pessoas que deveriam ser capazes de resolver um problema trivial como este passaram pela vergonha de publicar soluções erradas. Julgamos melhor esquecer os detalhes deste episódio deprimente.

2. A resposta correta é 2/3 (e não 1/2). As seis bolas seriam de início igualmente prováveis, mas sabemos que a primeira bola escolhida foi branca: assim, as três bolas brancas têm igual probabilidade. Estamos interessados em saber a cor da companheira de gaveta de cada bola branca: em dois casos é branca, em um caso é preta. Assim, a probabilidade de que a segunda bola seja branca é 2/3, como já afirmamos.

Um raciocínio comum, mas *errado,* é dizer: as gavetas são igualmente prováveis, mas obviamente não escolhemos a gaveta que contém duas bolas pretas. Portanto, teríamos probabilidade 1/2 de termos escolhido a gaveta com duas bolas brancas e 1/2 de termos escolhido a gaveta com uma bola de cada cor; no primeiro caso, a segunda bola é branca e, no segundo caso, a bola é preta. Assim, a resposta seria 1/2.

O que há de errado neste raciocínio? O erro está em dizer que as duas gavetas possíveis são igualmente prováveis. Inicialmente a probabilidade de cada gaveta é de fato a mesma (inclusive para a gaveta com duas bolas pretas), mas, ao tirarmos uma bola e constatarmos que ela é branca, isto deixa de ser verdade. Isto é bem óbvio para a gaveta com duas bolas pretas: passou a ser impossível termos escolhido esta gaveta. Entre as duas outras gavetas, entretanto, há uma diferença que está sendo ignorada no raciocínio do parágrafo anterior. Se pré-escolhermos a gaveta com duas bolas brancas, temos certeza de passar no teste: uma bola escolhida ao acaso nesta gaveta será sempre branca. Por outro lado, se pré-escolhermos a gaveta com uma bola de cada cor, ainda temos probabilidade 1/2 de sacarmos uma bola preta, o que estaria em contradição com o enunciado. Assim, a probabilidade de termos escolhido cada uma destas duas gavetas é 2/3 e 1/3, respectivamente. Podemos, a partir deste ponto facilmente deduzir a resposta correta de 2/3.

É fato empírico desencorajador que muitas pessoas teimam em dizer que a probabilidade é 1/2 mesmo após esta explicação. O seguinte exemplo serve como exercício para aqueles que entenderam a explicação e é uma espécie de redução ao absurdo do raciocínio "rival". Temos novamente três gavetas, uma com vinte bolas brancas, uma com vinte bolas pretas e a terceira com dez bolas de cada cor. Abrimos uma gaveta e, sem olhar, retiramos ao acaso dez bolas: elas são todas brancas. Qual a probabilidade de que as dez bolas restantes sejam também brancas?

3. No nosso exemplo, Bernardo tinha probabilidade 2/3 de ganhar. Em geral, o segundo a jogar leva uma vantagem considerável e, se escolher bem sua resposta, pode garantir uma probabilidade de vitória de pelo menos 2/3, mas às vezes até 7/8, dependendo da primeira jogada. A *Tabela 1* dá a probabilidade de vitória de Bernardo para cada par de jogadas (a coluna é a jogada de André e a linha a de Bernardo).

	ccc	**cck**	**ckc**	**ckk**	**kcc**	**kck**	**kkc**	**kkk**
ccc	_	**1/2**	**2/5**	**2/5**	**1/8**	**5/12**	**3/10**	**1/2**
ccc	**1/2**	_	**2/3**	**2/3**	**1/4**	**5/8**	**1/2**	**7/10**
ckc	**3/5**	**1/3**	_	**1/2**	**1/2**	**1/2**	**3/8**	**7/12**
ckk	**3/5**	**1/3**	**1/2**	_	**1/2**	**1/2**	**3/4**	**7/8**
kcc	**7/8**	**3/4**	**1/2**	**1/2**	_	**1/2**	**1/3**	**3/5**
kck	**7/12**	**3/8**	**1/2**	**1/2**	**1/2**	_	**1/3**	**3/5**
kkc	**7/10**	**1/2**	**5/8**	**1/4**	**2/3**	**2/3**	_	**1/2**
kkk	**1/2**	**3/10**	**5/12**	**1/8**	**2/5**	**2/5**	**1/2**	_

Tabela 1

Não reconstruiremos aqui toda a tabela: apresentaremos apenas como exemplo a situação descrita no enunciado. O leitor que estiver interessado em aprender mais sobre este problema pode consultar nosso *Precisa-se de alguém para ganhar muito dinheiro*, a ser publicado na *Revista do Profes-*

sor de Matemática do Chile, mas já disponível na home page do autor: http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/. O *Diagrama 2* descreve bem a situação. Os seis vértices indicam as seis situações possíveis durante o processo de jogar a moeda. O ponto indica que nenhum jogador tem como esperar fazer uso das jogadas já feitas, ou seja, ou nenhum lance ainda foi feito, ou foi lançado apenas um **k**, ou os dois últimos lances foram **kk**; como o jogo sempre começa nesta situação, chamaremos este vértice de *inicial*. O **c** indica que o último lance foi um **c** mas o anterior ou não existiu ou foi um **k**. Os vértices **cc** e **ck** indicam que estes foram os dois últimos lances. Finalmente, os vértices **cck** e **ckc** indicam que o jogo terminou; chamaremos estes vértices de *finais*.

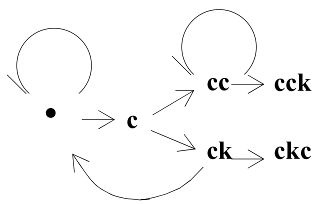


Diagrama 2

As duas setas partindo de cada vértice (exceto os finais) indicam como a situação se modifica a cada lance de moeda: elas correspondem às possibilidades de tirar **c** ou **k** em um dado momento. Queremos agora calcular a probabilidade de vitória de Bernardo, dado que o jogo chegou a uma certa situação. Temos, assim, quatro probabilidades a serem calculadas:
$p_.$, $p_{\mathbf{c}}$, $p_{\mathbf{cc}}$ e $p_{\mathbf{ck}}$; consideramos naturalmente $p_{\mathbf{cck}} = 1$ e $p_{\mathbf{ckc}} = 0$. Como a partir de cada vértice não final as probabilidades associadas às duas setas são iguais, temos as seguintes equações:

$$p_. = 1/2\,(p_. + p_{\mathbf{c}})$$
$$p_{\mathbf{c}} = 1/2\,(p_{\mathbf{cc}} + p_{\mathbf{ck}})$$
$$p_{\mathbf{cc}} = 1/2\,(p_{\mathbf{cc}} + 1)$$
$$p_{\mathbf{ck}} = 1/2\,p_. \,.$$

Resolvendo o sistema, temos $p_. = 2/3$, conforme afirmamos.

O erro mais natural aqui é achar que todas as seqüências são igualmente boas: isto não é verdade, pois os dois últimos lances em geral serviram, sem sucesso, para tentar finalizar as seqüências e servirão agora para tentar iniciá-las. Mais surpreendente ainda é o fato de que o segundo jogador *sempre* tem uma boa resposta: este jogo é um pouco como jogar par-ou-ímpar ou pedra-papel-tesoura com um dos jogadores tendo o direito de escolher sua jogada só *depois* de ver a jogada do adversário.

4. Antes de mais nada gostaríamos de lembrar que Eugênio deseja, *por hipótese*, maximizar o valor esperado do prêmio. Este critério é razoável em algumas situações e em outras não. Outro convidado poderia precisar desesperadamente de uma certa quantia, talvez R$ 100, e gostaria, portanto, de maximizar a probabilidade de ganhar pelo menos este valor crítico. Ainda outro convidado pode ser tão curioso que deseja saber quanto há em cada envelope mais do maximizar seu prêmio. O leitor, se fosse o convidado, talvez julgasse interessante considerar ainda outros aspectos. Podemos imaginar inúmeros critérios diferentes e em princípio cada critério gera um novo problema. Nós nos propomos aqui a estudar o problema na forma em que foi proposto e não a discutir se Eugênio, com sua opção pelo valor esperado, é um homem verdadeiramente sábio.

Neste problema, ao contrário dos outros, apresentaremos inicialmente um raciocínio falho e vamos segui-lo até chegarmos a um absurdo deixando a análise dos erros deste raciocínio para o final. Para tornar a discussão toda mais viva, acompanharemos o pensamento de Eugênio.

Ao receber a proposta de troca, Eugênio pensa: *Se ficar com este cheque, meu prêmio será de* R$ 100*. Se trocar de cheque, tenho probabilidade 1/2 de ganhar* R$ 45 *e probabilidade 1/2 de ganhar* R$ 195: o valor esperado é de $(1/2)\cdot 45 + (1/2)\cdot 195 = 120$ reais. Como 120 é maior que 100, a troca é vantajosa. Eugênio troca de cheque e fica felicíssimo ao ver que o outro cheque é de R$ 200: ele ganhou R$ 195!

Ao voltar para seu lugar no auditório, Eugênio continua pensando: *Na verdade vale a pena trocar qualquer que seja o valor do primeiro cheque. Se chamarmos este valor de x, temos por um lado a opção de ficar com x e por outro lado a opção de arriscar, com probabilidade 1/2 de ganhar* $0.45x$ *e probabilidade 1/2 de ganhar* $1.95x$*. No primeiro caso, o valor esperado é x e, no segundo caso, o valor esperado é* $1.2x$*. Assim, como $x > 0$,* *vale sempre a pena trocar*. Eugênio fica feliz com sua conclusão e pensa como seu curso de Probabilidade foi útil.

Mas um pouco mais tarde Eugênio começa a ter dúvidas quanto a suas conclusões: *Se vale a pena trocar de envelope sempre, então não é necessário abrir o envelope e ler o valor do cheque para tomar a decisão de trocar. Neste caso, eu poderia ter trocado de envelope um minuto antes e ter evitado a multa*. Eugênio fica irritado, pensando que poderia ter ganhado 5 reais a mais se apenas tivesse pensado mais rápido. Mas ele continua pensando: *Ei, espere, há algo errado! Um minuto antes os dois envelopes estavam lacrados e pareciam iguais para mim: trocar significaria apenas escolher o outro. Mas, então, cada vez que eu penso em um envelope tenho que trocar e nunca posso escolher nada!*

Assim, ao invés de aproveitar seu prêmio, Eugênio passa a noite angustiado com seu paradoxo. Na manhã seguinte, Eugênio procura seus colegas do curso de Probabilidade com a pergunta: *o que exatamente há de errado com este raciocínio?*

O erro de Eugênio está logo no início, quando aceita, sem aliás sequer questionar, que a probabilidade do segundo cheque ser maior é 1/2. O leitor deve estar muito surpreso: é quase como se de repente disséssemos que cara e coroa têm probabilidades diferentes. Por isso daremos uma explicação relativamente longa para tentar convencer.

Começaremos fazendo algumas digressões considerando o que um outro convidado, o João, que nunca estudou probabilidade, mas que tem bom senso, faria em algumas situações extremas. João não acompanha todos os sorteios, mas mesmo assim ele certamente tem *alguma* noção, por vaga que seja, de qual a faixa dos prêmios. Assim, se o valor do primeiro cheque fosse muito baixo, João certamente pensaria: *Não é possível, ou pelo menos não é provável, que o segundo cheque seja ainda menor.* Assim, quase certamente eu peguei o envelope com o cheque de menor valor (além de ter tido o azar de vir em um dia em que os prêmios foram baixos) *e aposto que o outro cheque é maior: vou trocar.* Por outro lado, se o valor do primeiro cheque fosse muito alto, seu pensamento seria: *Que sorte, hoje os prêmios estão ótimos! E é muito improvável que o segundo cheque seja ainda maior! Vou ficar com este cheque mesmo!* Assim, João *não* atribui probabilidades iguais às duas possibilidades (o segundo cheque ser maior ou menor), e as probabilidades que ele atribui (inconscientemente) a estes dois eventos dependem do valor do primeiro cheque.

Bem, este era o João e não o Eugênio: ao considerá-lo, desviamo-nos temporariamente do problema original e do contexto que nos impusemos no primeiro parágrafo deste desenvolvimento, pois João nem sabe o que é o valor esperado e seus critérios não são os de Eugênio. João atribuiu subjetivamente probabilidades diferentes aos dois eventos; Eugênio (que aliás não se defrontou com situações extremas) atribuiu probabilidades iguais. Será que em algum sentido é errado atribuir sempre probabilidades iguais?

Sim, atribuir probabilidades sempre iguais é não apenas errado, mas contraditório com a Teoria da Probabilidade que Eugênio tenta usar. Para entender isto, vamos representar cada configuração inicial de envelopes por um par ordenado (x_1, x_2) de números reais positivos: x_1 é o valor do cheque no primeiro envelope escolhido pelo convidado, e x_2 é o valor do segundo cheque. Assim, o espaço amostral $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é a união de duas semi-retas abertas partindo da origem, como mostrado na *Figura 3*. A história que contamos envolvendo Eugênio corresponde ao ponto (100, 200), também indicado. Ao abrir o primeiro envelope, definimos o valor de x_1 e ficamos restritos à interseção de Ω com uma reta vertical, ou seja, aos dois pontos $(x_1, x_2 = 2x_1)$ e $(x_1, x_2 = x_1/2)$.

Eugênio implicitamente aceita que a probabilidade condicional a um valor qualquer fixo para x_1 destes dois pontos é 1/2. Assim, ele deve aceitar que:

$$P(\{(t, 2t);\ t \in [T, 2T)\}) = P(\{(t, t/2);\ t \in [T, 2T)\})$$

para qualquer número positivo T, em que $P(C)$, $C \subseteq \Omega$, denota a probabilidade de que (x_1, x_2) esteja em C. Por outro lado, a simetria inicial entre os envelopes diz que

$$P(\{(t, 2t);\ t \in [T, 2T)\}) = P(\{(2t, t);\ t \in [T, 2T)\}).$$

Sejam

$$A_n = \{(t, 2t);\ t \in [2^n, 2^{n+1})\},$$
$$B_n = \{(2t, t);\ t \in [2^n, 2^{n+1})\},$$

em que n é um inteiro qualquer; as identidades acima nos dão $P(A_n) = P(B_{n-1})$ e $P(A_n) = P(B_n)$, respectivamente. Por indução, $P(A_n) = P(B_n) = P(A_0)$ para todo n. Observemos desde já que esta conclusão é no mínimo estranha: ela diz que a probabilidade de o valor de menor cheque estar entre 64 e 128 é igual à probabilidade de o menor cheque estar entre 2^{64} e 2^{65}, ou entre $2^{4199021}$ e $2^{4199022}$; no próximo parágrafo veremos que esta conclusão é não apenas estranha, mas realmente absurda, mesmo ignorando o fato de que um prêmio de R\$ $2^{4199021}$ é uma impossibilidade prática.

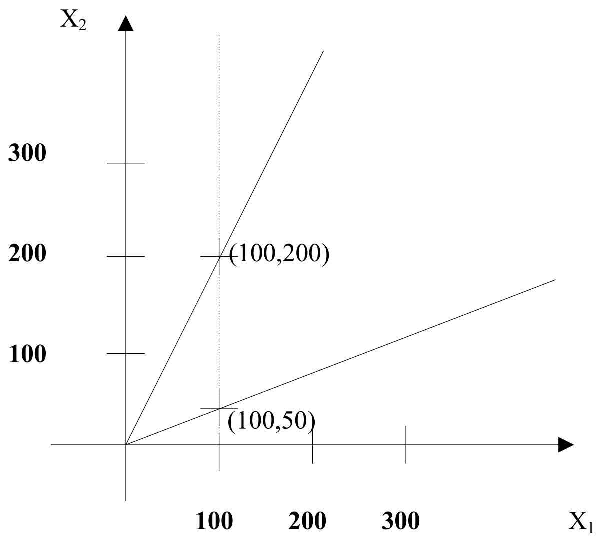


Figura 3

Observemos que os conjuntos A_n e B_n são dois a dois disjuntos e sua união é Ω. Se $P(A_0)>0$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\,P(A_0)>1$ e temos

$$P\left(\bigcup_{0 \le n < N} A_n\right) > 1,$$

o que é absurdo. Por outro lado, se $P(A_0) = 0$ temos

$$P\left(\bigcup_{-N<n<N}(A_n \cup B_n)\right) = 0$$

para todo N, o que também é um absurdo, pois, quando N cresce, este conjunto também cresce, tendendo no limite para Ω, donde teríamos $P(\Omega)= 0$, contradizendo $P(\Omega) = 1$. Assim, em qualquer caso, temos um absurdo.

Esta explicação é um pouco técnica, mas coincide perfeitamente com o "bom senso" de João: não podemos ignorar o primeiro cheque. Se seu valor for muito baixo, a probabilidade de que o segundo cheque seja maior deve em geral ser muito maior do que 1/2, pois $P(A_n)$ deve tender a zero quando n tende a $-\infty$. Por outro lado, se o seu valor for muito alto, a probabilidade de que o segundo cheque seja ainda maior deve ser muito menor do que 1/2, pois $P(A_n)$ também deve tender a zero quando n tende a $+\infty$. E Eugênio, afinal de contas, precisa fazer uma avaliação sutil, dependendo de que valores são plausíveis como prêmio: até um certo valor-limite vale a pena trocar, acima deste valor não.

Nicolau C. Saldanha
Departamento de Matemática, PUC-RIO
Gávea, Rio de Janeiro, RJ 22453-900, BRASIL
nicolau@mat.puc-rio.br, http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/

DOIS PROBLEMAS SOBRE GRAFOS

Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA

♦ Nível Intermediario.

INTRODUÇÃO

A figura abaixo mostra um mapa rodoviário de um país fictício. Neste artigo vamos examinar dois problemas relativos a este mapa:

1. Um funcionário, encarregado de verificar, periodicamente, o estado das estradas, deseja planejar a sua rota de inspeção. Idealmente, esta rota deveria se iniciar na capital e percorrer cada **estrada** exatamente uma vez, voltando, então, ao ponto de partida. Existe tal rota?

2. Um representante de vendas de uma companhia deseja planejar uma rota na qual ele visite cada **cidade** exatamente uma vez, voltando ao ponto de partida. Existe tal rota?

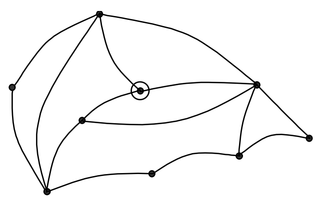


Fig. 1 - Mapa rodoviário de um país fictício

Há vários pontos em comum entre os dois problemas. Por exemplo: em ambos se deseja verificar a existência de um **circuito** (ou **ciclo**) no **grafo** determinado pelo mapa (um grafo é um par (V, A), em que V é o conjunto de **vértices** do grafo, e A é um conjunto de pares de vértices – os **arcos** do grafo). No primeiro problema, este circuito deve incluir exatamente uma vez cada arco do grafo. No segundo problema, o circuito deve incluir exatamente uma vez cada vértice do grafo. Embora os dois problemas sejam aparentemente semelhantes, há algumas diferenças fundamentais entre eles. Convidamos os leitores a refletir um pouco sobre cada um deles antes de prosseguir.

CIRCUITOS EULERIANOS

O primeiro problema – o do inspetor de estradas – foi estudado pela primeira vez por Euler (1707-1783). Por esta razão, um circuito que percorre cada arco de um grafo exatamente uma vez é chamado de **circuito euleriano** e um grafo que possui um tal circuito é chamado de **grafo euleriano**. A situação estudada por Euler ficou imortalizada como o *Problema das Pontes de Könisberg*, ilustrado na figura abaixo, e que possivelmente já é conhecido por muitos dos leitores. O objetivo é percorrer exatamente uma vez todas as sete pontes da cidade (hoje Kaliningrado), que conectam as duas ilhas entre si e com as margens do rio, voltando ao ponto de partida.

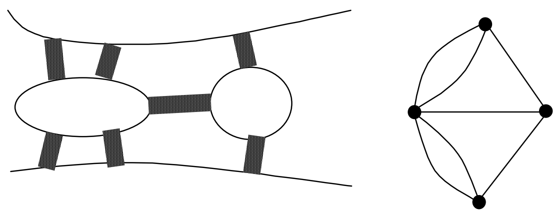


Fig. 2 – O Problema das Pontes de Könisberg

Em linguagem de grafos, trata-se de encontrar um circuito euleriano no grafo da figura acima, no qual os vértices representam as ilhas e as margens e os arcos são as pontes[1]. Euler mostrou a não-existência de tal circuito através de um argumento extremamente simples. Consideremos, por exemplo, a ilha da direita. Um circuito qualquer deve chegar à ilha e sair dela o mesmo número de vezes. Logo, para que exista um circuito euleriano, deve haver um número par de pontes com extremidade nesta ilha. Como existem três pontes nessas condições, concluímos que não é possível encontrar um circuito euleriano. De modo mais geral, temos o seguinte:

Teorema: *Existe um circuito euleriano em um grafo se e somente se o grafo é **conexo** (isto é, existe um caminho ligando qualquer par de vértices) e cada vértice tem **grau** par (ou seja, o número de arcos que nele incidem é par).*

---

[1] A rigor, neste caso temos um multi-grafo, já que certos pares de vértices são ligados por mais de um arco.

O argumento acima mostra a necessidade de se ter grau em cada vértice para existir um circuito euleriano. É também óbvio que o grafo precisa ser conexo. A prova de que essas duas condições implicam na existência de um circuito euleriano pode ser feita por indução finita no número de arcos do grafo e é deixada como um exercício para o leitor.

[Sugestão: suponha a propriedade verdadeira para grafos com menos de n arcos e considere um grafo com n arcos, satisfazendo às duas condições. Começando em um vértice qualquer, percorra arcos do grafo, até voltar a um vértice já visitado (o caminho gerado possui, então, um ciclo). Retirando do grafo os arcos desse ciclo, obtém-se um ou mais grafos satisfazendo as duas condições e com menor número de arcos (portanto, com circuitos eulerianos, de acordo com a hipótese de indução). Basta explicar como "costurar" esses circuitos eulerianos ao ciclo descrito acima].

Podemos aplicar este teorema ao nosso problema de inspeção de estradas. Da mesma forma como no Problema das Pontes de Könisberg, não existe qualquer circuito euleriano no grafo determinado pelo mapa rodoviário, já que o vértice correspondente à capital tem grau 3. Assim, se o nosso inspetor de estradas recebesse de seu chefe a incumbência de elaborar um trajeto nas condições do problema 1, ele poderia facilmente convencê-lo da impossibilidade de fazê-lo. Como veremos a seguir, a situação do seu colega representante de vendas é bem pior...

CIRCUITOS HAMILTONIANOS

Um circuito passando exatamente uma vez por cada vértice de um grafo é chamado de **circuito hamiltoniano**, em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), que estudou este problema no grafo determinado pelas arestas de um dodecaedro regular (existe ou não um circuito hamiltoniano neste caso?). Um grafo que possui um circuito hamiltoniano é chamado de **grafo hamiltoniano.**

A situação do problema de verificar se um grafo é hamiltoniano é bem diferente da do problema anterior. Apesar de terem sido estudados por vários séculos, não há uma boa caracterização dos grafos hamiltonianos. Há diversas famílias de grafos para os quais existe um circuito hamiltoniano (um exemplo trivial é um grafo completo, em que cada vértice é ligado a todos os outros); também é possível estabelecer certas condições que implicam na não-existência de um circuito. Mas uma caracterização geral não foi encontrada e, à luz de certos avanços em teoria da computação das últimas décadas, parece improvável que ela seja encontrada algum dia.

O problema de decidir se um grafo é hamiltoniano está na companhia de diversos problemas ilustres, com as seguintes características em comum:

- O problema possui uma assimetria fundamental: é muito fácil convencer alguém da existência de um circuito hamiltoniano em um grafo: basta exibir tal caminho. No entanto, é difícil, em geral, convencer alguém da não-existência de um tal circuito. Por exemplo, o grafo da figura abaixo (o leitor é capaz de reconhecê-lo?) tem um circuito hamiltoniano, de cuja existência o leitor fica imediatamente convencido pela figura. Já o grafo dado no início do artigo não tem circuito hamiltoniano, mas não existe um argumento simples e geral para demonstrar esse fato (assim, nosso amigo representante de vendas certamente terá mais trabalho para convencer seu chefe da impossibilidade de elaborar uma rota nas condições do problema 2 do que seu colega inspetor de estradas).

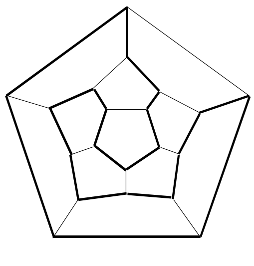


Fig. 3 – Um grafo hamiltoniano

- Não se conhece um algoritmo eficiente para verificar se um grafo é hamiltoniano (por eficiente, entendemos aqui um algoritmo em que o número de passos seja limitado por um polinômio no número de vértices do grafo). Além disso, parece improvável que um tal algoritmo possa algum dia ser encontrado, porque sua existência implicaria na existência de algoritmos eficientes para um grande número de outros problemas, para os quais também não se conhecem algoritmos eficientes. Estes problemas (incluindo o de verificar a existência de circuito hamiltoniano) formam uma classe de problemas chamados de **NP-completos**. Um outro problema famoso da classe é o de determinar o número mínimo de cores que podem ser usadas para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices de mesma cor não sejam ligados por um arco.

O leitor poderá estar pensando assim: mas será que esta história de algoritmos eficientes tem relevância, numa era de computadores cada vez mais velozes? Afinal de contas, existe um algoritmo extremamente simples para verificar se um grafo possui um circuito hamiltoniano. Se existir um tal circuito, ele corresponderá a uma permutação (circular) dos vértices com a propriedade de que vértices consecutivos sejam ligados por um arco do grafo. Ora, para verificar a existência de circuito hamiltoniano basta gerar todas as permutações circulares dos vértices e testar se uma delas corresponde a um percurso no grafo.

É claro que este algoritmo funciona para grafos de tamanho moderado (ele poderia ser o recurso usado pelo nosso vendedor: como são apenas 9 cidades, ele teria que testar "apenas" 8! = 40.320 caminhos, o que seria feito com rapidez em um computador). Mas o que ocorre com grafos maiores? Vejamos, por exemplo, uma situação em que o número de cidades cresce para 50 (o que representaria um tamanho ainda bastante razoável para uma situação real). Neste caso, o computador deveria examinar 49! circuitos potenciais. Tentemos estimar a magnitude deste número. A forma mais simples é usar a fórmula de Stirling, que fornece a estimativa $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Mas, neste caso, podemos usar estimativas mais elementares. Por exemplo, podemos usar apenas potências de 2. Temos:

$$49! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times ... \times 15 \times 16 \times ... \times 31 \times 32 \times \ldots \times 49 > 1 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 8 \times ... \times 8 \times 16 \times ... \times 16 \times 32 \times \ldots \times 32 = 2^2 \text{ x } 4^4 \text{ x } 8^8 \text{ x } 16^{16} \text{ x } 32^{18} = 2^{2+8+64+90} = 2^{164}.$$

Mas $2^{10} = 1024 > 10^3$. Logo $49! > 16.\ 10^{48}$.

Ora, um computador moderno pode realizar cerca de 200 milhões de operações por segundo. Se em cada operação ele conseguir testar um circuito, ele ainda assim precisará de mais de $16.\ 10^{48} / 2.\ 10^6 = 8 \times 10^{42}$ segundos, o que corresponde a aproximadamente a 2×10^{35} anos. Assim, trata-se claramente de uma missão impossível para o algoritmo de força bruta baseado na análise de cada permutação de vértices.

PROBLEMAS DIFÍCEIS QUE TAMBÉM SÃO ÚTEIS

O resultado da discussão acima pode parecer bastante desanimador: não parece haver bons métodos para verificar a existência de um circuito hamiltoniano e algoritmos de força bruta só funcionam para problemas com pequeno número de vértices (é bom que se diga que existe um meio termo: há estratégias que permitem resolver o problema acima para valores razoáveis de n, reduzindo substancialmente o número de possibilidades a serem examinadas; mesmo estes algoritmos, no entanto, tornam-se impráticos a partir de um certo ponto). O mesmo ocorre com todos os chamados problemas NP-completos.

No entanto, ao invés de ficarmos deprimidos com esta característica desses problemas, podemos explorá-la para uma importante finalidade em *criptografia*, que é a parte da Matemática que estuda métodos para criar e decifrar códigos. Para tal, é também muito importante a assimetria apontada acima (e que ocorre em todos os problemas NP-completos): é difícil encontrar um circuito hamiltoniano (ou mostrar que não existe um), mas é fácil testar se uma seqüência de vértices forma um circuito hamiltoniano.

Suponhamos que você seja cliente de um banco. Para ter acesso aos serviços, você usa o número de sua conta (que é público) e uma senha, que em princípio deve ser conhecida apenas por você. O procedimento mais simples seria ter a sua senha armazenada no sistema do banco. Mas aí você correria o risco de que ela fosse descoberta, por exemplo, por um funcionário desonesto. Em lugar disto, o sistema do banco armazena uma versão codificada da senha, que não precisa ficar em segredo. Esta codificação deve ser feita de tal forma que seja simples verificar se sua senha está correta (para que você seja autorizado a retirar dinheiro do caixa eletrônico), mas seja praticamente impossível recuperar a senha a partir da versão codificada.

Problemas NP-completos servem como uma luva para esta tarefa. Se quiséssemos usar o problema do circuito hamiltoniano, poderíamos agir mais ou menos da formadescrita a seguir. O cliente poderia escolher uma permutação dos números de 1 a 50, conhecida apenas por ele. A partir dessa informação, seria gerado um grafo, contendo necessariamente os arcos correspondentes ao circuito (os demais poderiam, por exemplo, ser gerados por um método aleatório, em que cada um dos possíveis arcos teria uma certa probabilidade de sere escolhido). Este grafo seria armazenado no sistema. A figura a seguir mostra uma representação de uma permutação dos números de 1 a 50 e um grafo, gerado aleatoriamente, que possui um ciclo hamiltoniano dado por esta permutação.

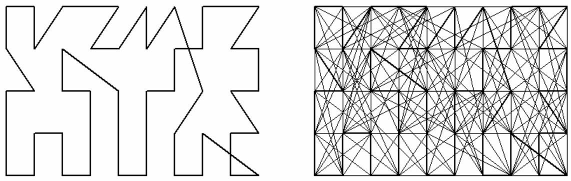


Fig. 4 – Um ciclo hamiltoniano e um grafo gerado a partir dele

Quando o cliente fosse utilizar sua conta, o sistema simplesmente verificaria se a permutação apresentada corresponde a um caminho no grafo. Como é improvável que um tal ciclo pudesse ser encontrado para um grafo deste tamanho, dificilmente um impostor conseguiria se fazer passar pelo cliente, ainda que conhecesse o grafo-problema. Na prática, são utilizados outros problemas NP-completos para se fazer codificação de senhas, mas a idéia é exatamente a mesma acima.

PALAVRAS FINAIS

Grafos são uma fonte inesgotável de problemas com enunciado simples mas que escondem, muitas vezes, uma sofisticada estrutura matemática. Neste artigo abordamos apenas alguns aspectos de dois desses problemas. Certamente voltaremos a falar em grafos em outros artigos desta revista. Para o leitor que deseja saber mais sobre o assunto, recomendamos os livros a seguir:

- Jaime Luiz Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Editora Campus.
- Oynstein Ore. *Graphs and Their Uses*. The Mathematical Association of America.

PROBLEMAS PROPOSTOS

✉ *Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e sugestões de novos problemas para os próximos números.*

1) Mostre que, dado um conjunto de n pessoas, existem duas que possuem o mesmo número de amigos entre as pessoas do conjunto.

2) Em uma pista circular há postos de gasolina, e o total de gasolina que há nos postos é exatamente o suficiente para um carro dar uma volta. Prove que existe um posto de onde um carro com o tanque inicialmente vazio pode partir e conseguir dar uma volta completa na pista (parando para reabastecer nos postos).

3) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os últimos 1000 dígitos de n^{1998} são iguais a 1.

4) Escreva *1998* como soma de (um número arbitrário de) parcelas de modo que o produto das parcelas seja o maior possível.

5) Sejam $a > 0$ e $P_1P_2P_3P_4P_5$ uma poligonal aberta contida em um dos semi-planos determinados pela reta $\overline{P_1P_5}$. Prove que é possível escolher pontos P_6 e P_7 no plano com $\overline{P_5P_6} = a$ de modo que é possível ladrilhar o plano com infinitos ladrilhos congruentes ao heptágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

6) Mostre que toda seqüência com $n^2 + 1$ elementos possui uma subseqüência crescente com $n + 1$ elementos ou uma subseqüência decrescente com $n + 1$ elementos.

7) Prove que $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{1998}}}} < 2$

8) Considere um torneio de xadrez envolvendo brasileiros e argentinos em que cada jogador joga contra todos os outros exatamente uma vez. Ao final do torneio, cada jogador obteve metade dos pontos que conquistou jogando contra brasileiros e metade jogando contra argentinos. Prove que o número total de jogadores do torneio é um quadrado perfeito (obs: cada vitória vale 1 ponto, empate 1/2 ponto e derrota 0 ponto).

9) Prove que todo número racional positivo pode ser escrito como soma de um certo número de frações distintas de numerador 1.

Você sabia... que

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$ e

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

mas não é possível escrever $\cos\frac{2\pi}{7}$ e $\cos\frac{2\pi}{9}$ usando radicais reais?

AGENDA OLÍMPICA

IV OLIMPÍADA DE MAIO
09 de maio, 14 h

♦

OLIMPÍADA DO CONE SUL
13 a 21 de junho de 1998
Salvador – BA.

♦

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Sábado, 6 de junho
Segunda Fase – Sábado, 12 de setembro
Terceira Fase – Sábado, 24 de outubro (níveis 1,2 e 3)
Domingo, 25 de outubro (nível 3).

♦

39 ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
10 a 21 de julho
Taiwan.

♦

OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
13 a 20 de setembro de 1998
República Dominicana.

COORDENADORES REGIONAIS

Alberto Hassen Raad	*(UFJF)*	*Juiz de Fora-MG*
Antônio C. Rodrigues Monteiro	*(UFPE)*	*Recife-PE*
Amarísio da Silva Araújo	*(UFV)*	*Viçosa-MG*
Angela Camargo	*(Esc. Tec. Hermann Hering)*	*Blumenau-SC*
Antônio C. do Patrocínio	*(IMECC/UNICAMP)*	*Campinas-SP*
Benedito T. Vasconcelos Freire	*(UFRGDN)*	*Natal-RN*
Carlos A. Bandeira Braga	*(UFPB)*	*João Pessoa-PB*
Claudio Arconcher	*(Col. Leonardo da Vinci)*	*Jundiaí-SP*
Élio Mega	*(Col. ETAPA)*	*São Paulo-SP*
Florêncio F. Guimarães F.	*(UFES)*	*Vitória-ES*
Francisco Dutenhefner	*(UFMG)*	*BH-MG*
Gisele de A. Prateado G.	*(UFGO)*	*Goiânia-GO*
João B. de Melo Neto	*(UFPI)*	*Teresina-PI*
José Carlos Pinto Leivas	*(URG)*	*Rio Grande-RS*
José Paulo Carneiro	*(USU)*	*Rio de Janeiro-RJ*
José Vieira Alves	*(UFPB)*	*Campina Grande-PB*
Leonardo Matteo D'orio	*(Parque de Material Aeronáutico de Belém)*	*Belém-PA*
Luzinalva M. de Amorim	*(UFBA)*	*L. de Freitas-BA*
Marco Polo	*(Colégio Singular)*	*Santo André-SP*
Marcondes Cavalcante França	*(UF Ceará)*	*Fortaleza-CE*
Mario Jorge Dias Carneiro	*(UFMG)*	*BH-MG*
Ma-To-Fú	*(UEM)*	*Maringá-PR*
Pablo Rodrigo Ganassim	*(L. Albert Einstein)*	*Rio das Pedras-SP*
Paulo H. Cruz Neiva de L. Jr.	*(Esc. Tec.Everardo Passos)*	*Piracicaba-SP*
Reinaldo Gen Ichiro Arakaki	*(INPE)*	*S.J.Campos-SP*
Ricardo Amorim	*(Centro Educ. Logos)*	*Nova Iguaçu-RJ*
Sergio Claudio Ramos	*(IM-UFRGS)*	*Porto Alegre-RS*