IMC 2010 - 1^o DIA

Problema 1. Seja $0 < a < b$. Prove que

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}$$

Problema 2. Calcule a some da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots$$

Problema 3. Defina a sequência $x_1, x_2, \ldots$ indutivamente por $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ para $n \geq 1$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}{x_{n+1}}$$

Problema 4. Sejam a, b dois inteiros e suponha que n seja um inteiro positivo para o qual o conjunto

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

seja finito. Prove que $n = 1$.

Problema 5. Sejam a, b, c números no intervalo $[-1, 1]$ tais que

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Prove que,

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$$

para todo inteiro positivo n.

IMC 2010 - 2^o DIA

Problema 1. (a) Uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ de números reais satisfaz

$$x_{n+1} = x_n cos x_n, \forall n \geq 1.$$

É verdade que, para todo valor inicial x_1, essa sequência converge?

(b) Uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ de números reais satisfaz

$$y_{n+1} = y_n sen y_n, \forall n \geq 1.$$

É verdade que, para todo valor inicial x_1, essa sequência converge?

Problema 2. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_{k+1} - a_k \geq 1$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Prove que

$$1 + \frac{1}{a_0}(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n - a_0}) \leq (1 + \frac{1}{a_0})(1 + \frac{1}{a_1}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n})$$

Problema 3. Seja S_n o grupo de permutações da sequência $(1, 2, \ldots, n)$. Suponha que G seja um subgrupo de S_n tal que, para cada permutação $\pi \in G \setminus \{e\}$, existe um único $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para o qual $\pi(k) = k$ (e é a unidade do grupo S_n). Mostre que k é o mesmo para todo $\pi \in G \setminus \{e\}$.

Problema 4. Seja A uma matriz $m \times m$ simétrica definida no corpo de dois elementos. Suponha que todos os elementos da diagonal de A sejam zero. Prove que, para todo inteiro positivo n, cada coluna da matriz A^n tem uma entrada igual a zero.

Problema 5. Suponha que, para a funcão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(y + \frac{k}{p}) = 0$$

para todo número primo p and todo número real y.