XXIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Salvador, Brasil, 20–28 de Setembro de 2008

Terça-feira, 23 de Setembro de 2008

Problema 1. Os números 1, 2, 3, ..., 2008^2 são distribuídos num tabuleiro 2008×2008, de modo que em cada casa haja um número distinto. Para cada linha e cada coluna do tabuleiro calcula-se a diferença entre o maior e o menor dos seus elementos. Seja S a soma dos 4016 números obtidos. Determine o maior valor possível para S.

Problema 2. Sejam ABC um triângulo escaleno e r a bissectriz externa do ângulo $\angle ABC$. Sejam P e Q os pés das perpendiculares à recta r que passam por A e C, respectivamente. As rectas CP e AB intersectam-se em M e as rectas AQ e BC intersectam-se em N. Demonstre que as rectas AC, MN e r têm um ponto em comum.

Problema 3. Sejam m e n inteiros tais que o polinômio $P(x) = x^3 + mx + n$ tem a seguinte propriedade: se x e y são inteiros e 107 divide $P(x) - P(y)$, então 107 divide $x - y$. Demonstre que 107 divide m.

Idioma: Português

Duração: 4 h 30 min
Cada problema vale 7 pontos

XXIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Salvador, Brasil, 20–28 de Setembro de 2008

Quarta-feira, 24 de Setembro de 2008

Problema 4. Demonstre que não existem inteiros positivos x e y tais que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

Problema 5. Seja ABC um triângulo e X, Y, Z pontos interiores dos lados BC, AC, AB, respectivamente. Sejam A', B', C' os circuncentros dos triângulos AZY, BXZ, CYX, respectivamente. Demonstre que

$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

e que a igualdade ocorre se, e somente se, as rectas AA', BB', CC' têm um ponto em comum.

Observação: Para um triângulo qualquer RST, denotamos a sua área por (RST).

Problema 6. Numa partida de *biribol* enfrentam-se duas equipes de quatro jogadores cada uma. Organiza-se um torneio de biribol em que participam n pessoas, que formam equipes para cada partida (as equipes não são fixas). No final do torneio observou-se que cada duas pessoas disputaram exactamente uma partida em equipes rivais. Para que valores de n é possível organizar um torneio com tais características?

Idioma: Português

Duração: 4 h 30 min
Cada problema vale 7 pontos