# XXII$^{a}$ OLIMPÍADA de MAIO
## Primeiro Nível
## Maio de 2016

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar calculadora; não se pode consultar livros nem anotações.
Justifique cada uma de suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 27 de maio.

### PROBLEMA 1

Em una folha estão escritos sete números inteiros positivos diferentes. O resultado da multiplicação dos sete números é o cubo de um número inteiro. Se o maior dos números escritos na folha é $N$, determine o menor valor possível de $N$. Mostre um exemplo para esse valor de $N$ e explique por que não é possível que $N$ seja menor.

### PROBLEMA 2

Em uma competição esportiva em que se realizam várias provas, só participam os três atletas $A$, $B$, e $C$. En cada prova, o ganhador recebe $x$ pontos, o segundo recebe $y$ pontos e o terceiro recebe $z$ pontos. Não há empates, e os números $x$, $y$, $z$ são inteiros positivos distintos com $x$ maior que $y$, e $y$ maior que $z$.

Ao terminar a competição, $A$ acumulou 20 pontos, $B$ acumulou 10 puntos e $C$ acumulou 9 pontos. Sabemos que o atleta $A$ ficou em segundo na prova de 100 metros. Determinar qual dos três atletas ficou em segundo na prova de salto.

### PROBLEMA 3

No triângulo $ABC$ foram marcados o ponto $D$ no lado $BC$ e o ponto $E$ no lado $AC$ de maneira que $CD = DE = EB = BA$. O ângulo $A\hat{C}B$ mede $20^{\circ}$. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{D}E$.

### PROBLEMA 4

Dado um tabuleiro $3\times3$ deseja-se escrever em suas casas os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e um número inteiro positivo $M$, não necesariamente distinto dos anteriores. O objetivo é que a soma dos três números de cada linha seja a mesma.

a) Encontre todos os valores de $M$ para os quais isto seja possível.

b) Para quais valores de $M$ encontrados em a) é possível inserir os números de modo que não só as três linhas tenham a mesma soma mas também as três colunas tenham a mesma soma ?

### PROBLEMA 5

No quadro-negro estão escritos os 400 números inteiros 1, 2, 3, ..., 399, 400. Luis apaga 100 desses números, depois Martín apaga outros 100. Martín ganha se a soma dos 200 números apagados é igual à soma dos que não foram apagados; caso contrário Luis ganha. Qual dos dois tem estratégia vencedora ?

E se Luis apaga 101 números e Martín apaga 99 ?

En cada caso, explique como o jugador que tem a estratégia vencedora pode garantir a vitória.

**XXII$^a$ OLIMPÍADA de MAIO**
**Segundo Nível**
**Maio de 2016**

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar calculadora; não se pode consultar livros nem anotações.
<u>Justifique cada uma de suas respostas.</u>
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 27 de maio.

## PROBLEMA 1

Dizemos que um número de quatro dígitos $\overline{abcd}$, que começa com $a$ e termina com $d$, é *intercambiável* se existe um inteiro $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ é um número de quatro dígitos que começa com $d$ e termina com $a$. Por exemplo, 1009 é intercambiável já que $1009 \times 9 = 9081$. Determine o maior número intercambiável.

## PROBLEMA 2

Quantas casas devem ser pintadas no mínimo em um tabuleiro $5 \times 5$ de tal modo que em cada linha, em cada coluna e em cada quadrado $2 \times 2$ haja pelo menos uma casa pintada?

## PROBLEMA 3

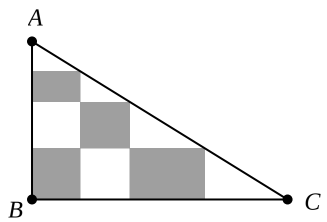
Dizemos que um número inteiro positivo é *qua-divi* se é divisível pela soma dos quadrados de seus dígitos, e além disso nenhum de seus dígitos é igual a zero.
a) Encontre um número qua-divi tal que a soma de seus dígitos seja 24.
b) Encontre um número qua-divi tal que a soma de seus dígitos seja 1001.

## PROBLEMA 4

Em um triângulo $ABC$, sejam $D$ e $E$ pontos dos lados $BC$ e $AC$, respectivamente. Os segmentos $AD$ e $BE$ se cortam en $O$. Suponhamos que a base média do triângulo, paralela a $AB$, divide o segmento $DE$ ao meio. Demonstrar que o triângulo $ABO$ e o quadrilátero $ODCE$ têm áreas iguais.

## PROBLEMA 5

Rosa e Sara jogam com un triângulo $ABC$, retângulo em $B$. Rosa começa marcando dois pontos interiores da hipotenusa $AC$, depois Sara marca um ponto interior da hipotenusa $AC$ distinto dos de Rosa. Após isso, a partir destes três pontos traçam-se as perpendiculares aos lados $AB$ e $BC$, formando-se a seguinte figura:




Sara ganha o jogo se a área da superfície sombreada é igual à área da superfície não sombreada; caso contrário Rosa ganha o jogo. Determinar qual das duas tem estratégia vencedora.