21ª OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de máquina de calcular, equipamentos eletrônicos nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
O professor pensou em segredo em um número *S* de três dígitos. Os alunos *A*, *B*, *C* e *D* tentaram adivinhá-lo, dizendo, respectivamente, 541, 837, 291 e 846. O professor disse, "Cada um de vocês acertou exatamente um dígito de *S* e na posição correta. Além disso, para cada dígito de *S* houve pelo menos um acerto". Qual é o número *S*?

PROBLEMA 2
São dadas 6 moedas indistinguíveis. 4 são autênticas, todas do mesmo peso, e 2 são falsas, uma é mais leve que as autênticas e a outra é mais pesada que as autênticas. As 2 falsas pesam, juntas, o mesmo que duas moedas autênticas. Encontre duas moedas autênticas utilizando duas vezes uma balança de dois pratos, sem pesos.
Observação: Uma balança de dois pratos somente informa se o prato esquerdo pesa mais, o mesmo ou menos que o direito.

PROBLEMA 3
No quadrilátero *ABCD*, o ângulo C é o triplo do ângulo A. Sejam *P* no lado *AB* tal que $DPA = 90^{\circ}$ e Q no lado *AD* tal que $BQA = 90^{\circ}$. Os segmentos *DP* e *BQ* se cortam em *O* de modo que $BO = CO = DO$. Calcule a medida dos ângulos A e C.

PROBLEMA 4
Dizemos que um número é *supersticioso* quando é igual a 13 vezes a soma de seus dígitos. Encontre todos os números supersticiosos.

PROBLEMA 5
Numa casa se reúnem vinte e seis pessoas. Alicia é amiga de apenas uma pessoa, Bruno é amigo de duas pessoas, Carlos é amigo de três, Daniel de quatro, Elías de cinco, e assim por diante, cada pessoa é amiga de uma pessoa a mais do que a pessoa anterior, até chegar a Yvonne, a pessoa número vinte e cinco, que é amiga de todos. De quantas pessoas é amiga Zoila, a pessoa número vinte e seis?
Observação: Se A é amigo de B então B é amigo de A.

21ª OLIMPÍADA DE MAIO
SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de máquina de calcular, equipamentos eletrônicos nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
Ana e Celia vendem vários objetos e obtêm por cada objeto tantos euros quanto objetos venderam. O dinheiro obtido está formado por algumas notas de 10 euros e menos de 10 moedas de 1 euro. Elas decidem repartir o dinheiro da seguinte forma: Ana pega uma nota de 10 euros e depois Celia, e assim sucesivamente, até que Ana pega a última nota de 10 euros, e Celia fica com todas as moedas de 1 euro. Ana pegou quantos euros a mais do que Celia? Diga todas as possibilidades.

PROBLEMA 2
Temos um tabuleiro 7×7. Desejamos colorir algumas de suas casas de forma tal que qualquer subtabuleiro 3×3 tenha mais casas coloridas que sem colorir. Qual é a menor quantidade de casas que debemos colorir? Mostre uma configuração com esa quantidade de casas coloridas e explique porque não é possível com menos.
Observação: Um subtabuleiro 3×3 é um quadrado formado por 9 casas do tabuleiro.

PROBLEMA 3
Seja *ABCDEFGHI* um polígono regular de 9 lados. Os segmentos *AE* e *DF* se cortam em *P*. Demonstre que *PG* e *AF* são perpendiculares.

PROBLEMA 4
Num quadro negro estão escritos os primeiros 510 inteiros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Uma *operação* consiste em apagar dois números cuja soma seja um número primo. Qual é o maior número de operações seguidas que podemos fazer? Mostre como isso é possível e explique por que não é possível fazer mais operações.

PROBLEMA 5
Temos 65 pontos no plano. Se traçarmos todas as retas que passam por 2 deles obtemos exatamente 2015 retas distintas. Demonstre que pelo menos 4 dos pontos estão alinhados.