

# 21ª OLIMPÍADA DE MAIO

## PRIMEIRO NÍVEL



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não é permitido o uso de máquina de calcular, equipamentos eletrônicos nem livros ou anotações.

Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.

Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.

**Justifique cada uma das respostas**

**Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.**

### PROBLEMA 1

O professor pensou em segredo em um número  $S$  de três dígitos. Os alunos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  tentaram adivinhá-lo, dizendo, respectivamente, 541, 837, 291 e 846. O professor disse, “Cada um de vocês acertou exatamente um dígito de  $S$  e na posição correta. Além disso, para cada dígito de  $S$  houve pelo menos um acerto”. Qual é o número  $S$ ?

### PROBLEMA 2

São dadas 6 moedas indistinguíveis. 4 são autênticas, todas do mesmo peso, e 2 são falsas, uma é mais leve que as autênticas e a outra é mais pesada que as autênticas. As 2 falsas pesam, juntas, o mesmo que duas moedas autênticas. Encontre duas moedas autênticas utilizando duas vezes uma balança de dois pratos, sem pesos.

**Observação:** Uma balança de dois pratos somente informa se o prato esquerdo pesa mais, o mesmo ou menos que o direito.

### PROBLEMA 3

No quadrilátero  $ABCD$ , o ângulo  $C$  é o triplo do ângulo  $A$ . Sejam  $P$  no lado  $AB$  tal que  $DPA = 90^\circ$  e  $Q$  no lado  $AD$  tal que  $BQA = 90^\circ$ . Os segmentos  $DP$  e  $BQ$  se cortam em  $O$  de modo que  $BO = CO = DO$ . Calcule a medida dos ângulos  $A$  e  $C$ .

### PROBLEMA 4

Dizemos que um número é *supersticioso* quando é igual a 13 vezes a soma de seus dígitos. Encontre todos os números supersticiosos.

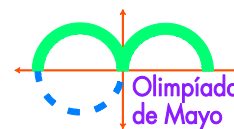
### PROBLEMA 5

Numa casa se reúnem vinte e seis pessoas. Alicia é amiga de apenas uma pessoa, Bruno é amigo de duas pessoas, Carlos é amigo de três, Daniel de quatro, Elías de cinco, e assim por diante, cada pessoa é amiga de uma pessoa a mais do que a pessoa anterior, até chegar a Yvonne, a pessoa número vinte e cinco, que é amiga de todos. De quantas pessoas é amiga Zoila, a pessoa número vinte e seis?

**Observação:** Se  $A$  é amigo de  $B$  então  $B$  é amigo de  $A$ .

# 21ª OLIMPÍADA DE MAIO

## SEGUNDO NÍVEL



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não é permitido o uso de máquina de calcular, equipamentos eletrônicos nem livros ou anotações.

Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.

Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.

**Justifique cada uma das respostas**

**Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.**

### PROBLEMA 1

Ana e Celia vendem vários objetos e obtêm por cada objeto tantos euros quanto objetos venderam. O dinheiro obtido está formado por algumas notas de 10 euros e menos de 10 moedas de 1 euro. Elas decidem repartir o dinheiro da seguinte forma: Ana pega uma nota de 10 euros e depois Celia, e assim sucessivamente, até que Ana pega a última nota de 10 euros, e Celia fica com todas as moedas de 1 euro. Ana pegou quantos euros a mais do que Celia? Diga todas as possibilidades.

### PROBLEMA 2

Temos um tabuleiro  $7 \times 7$ . Desejamos colorir algumas de suas casas de forma tal que qualquer subtabuleiro  $3 \times 3$  tenha mais casas coloridas que sem colorir. Qual é a menor quantidade de casas que devemos colorir? Mostre uma configuração com esa quantidade de casas coloridas e explique porque não é possível com menos.

**Observação:** Um subtabuleiro  $3 \times 3$  é um quadrado formado por 9 casas do tabuleiro.

### PROBLEMA 3

Seja  $ABCDEFGHI$  um polígono regular de 9 lados. Os segmentos  $AE$  e  $DF$  se cortam em  $P$ . Demonstre que  $PG$  e  $AF$  são perpendiculares.

### PROBLEMA 4

Num quadro negro estão escritos os primeiros 510 inteiros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Uma *operação* consiste em apagar dois números cuja soma seja um número primo. Qual é o maior número de operações seguidas que podemos fazer? Mostre como isso é possível e explique por que não é possível fazer mais operações.

### PROBLEMA 5

Temos 65 pontos no plano. Se traçarmos todas as retas que passam por 2 deles obtemos exatamente 2015 retas distintas. Demonstre que pelo menos 4 dos pontos estão alinhados.