

# 39ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 1 (6º ou 7º ano)

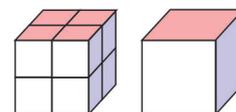


1. Em corridas de carros, é comum mostrar a posição dos pilotos em cada uma das voltas da corrida, relativamente à ordem de largada. Para isso, são usados os símbolos  $-0$  para indicar que a posição é a mesma da largada,  $\wedge$  ao lado de um número indicando quantas posições ele subiu em relação à largada e  $\vee$  ao lado de um número indicando quantas posições ele caiu em relação à largada. Além disso, utiliza-se uma abreviação dos nomes dos pilotos. Na volta 17 de uma corrida de 25 voltas, a posição dos dez primeiros colocados era a seguinte:

Volta 17/25		
Posição	Piloto	
1	PRE	$-0$
2	SAP	$\wedge 2$
3	BET	$\wedge 3$
4	ICO	$\vee 1$
5	ROI	$\vee 3$
6	FRE	$\vee 1$
7	LEM	$-0$
8	ARE	$\wedge 2$
9	DON	$\wedge 7$
10	JEZ	$\vee 2$

- a) Escreva os nomes abreviados dos cinco primeiros colocados na largada da corrida e suas respectivas posições.
- b) A partir da volta 17 e até o fim da corrida, os três primeiros colocados conseguem manter seus tempos de duração de cada volta: PRE faz cada volta em 2min01s, SAP faz cada volta em 1min59s e BET faz cada volta em 1min58s. No fim da volta 17, SAP estava 15s atrás de PRE e BET estava 18s atrás de PRE. Considerando que esses três pilotos formaram o pódio e que o piloto mais rápido sempre conseguiu ultrapassar um piloto mais lento a sua frente, explique quem ganhou a corrida e quais pilotos ocuparam o segundo e terceiro lugares.

2. Jacira tem muitos cubinhos cujos lados medem 1 cm, 2 cm ou 3 cm. Assim, por exemplo, ela tem duas maneiras diferentes de obter um cubo cujo volume é  $8 \text{ cm}^3$ : uma delas é montar um cubo com 8 cubinhos de 1 cm de lado e a outra é simplesmente pegar um cubo com 2 cm de lado, como mostrado na figura. Note que dois cubos de mesmo volume são obtidos de maneiras diferentes se, e somente se, são montados com diferentes números de cubos.



- a) De quantas maneiras diferentes ela pode obter um cubo com volume de  $27 \text{ cm}^3$ ?
- b) De quantas maneiras diferentes ela pode obter um cubo com volume de  $64 \text{ cm}^3$ ?

3. Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... os Impas têm os números correspondentes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, ... (note que os números dos Impas têm somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.

- a) Como os Impas escrevem o nosso número 20?
- b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha de multiplicar abaixo. Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

- c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

4. Alguns retângulos podem ser divididos em um quadrado e quatro retângulos menores iguais, de modo que todas essas cinco partes podem ser reunidas para compor um novo quadrado.
- Faça um desenho mostrando como um quadrado e quatro retângulos iguais podem ser reunidos para formar um novo quadrado.
  - Mostre um retângulo que pode ser dividido de acordo com a exigência do enunciado e indique as medidas dos seus lados.
  - Se o perímetro do seu retângulo é de 780 cm, quais podem ser os valores do perímetro do quadrado formado depois da nova arrumação das partes?

5. Vemos, nas figuras 1 e 2 a seguir, exemplos de bloqueio de tela de um telefone celular que só funciona com uma senha que não é digitada, mas desenhada com segmentos de reta. Esses segmentos formam uma linha poligonal com vértices em um reticulado. Ao desenhar o padrão correspondente à senha, o dedo deve permanecer todo o tempo tocando a tela. Toda a linha poligonal corresponde a uma sequência de algarismos e essa sequência é que é, de fato, a senha. O traçado das poligonais obedece às regras a seguir:
- O traçado começa por um dos pontos destacados, os quais correspondem aos algarismos de 1 a 9 (figura 3).
  - Cada segmento do padrão deve ter como um dos seus extremos (aquele em que terminamos de traçar o segmento) um ponto que ainda não foi usado.
  - Se um segmento liga dois pontos e contém um terceiro (o seu ponto médio), então o algarismo correspondente a esse terceiro ponto é incluído na senha. Isso não acontece quando esse ponto/algarismo já foi usado.
  - Toda senha tem pelo menos quatro algarismos.

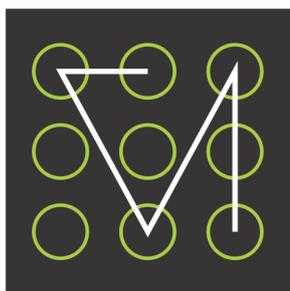


figura 1

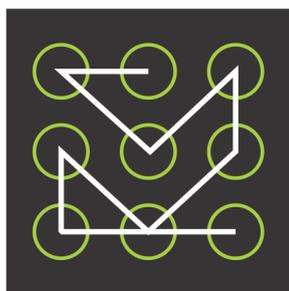


figura 2

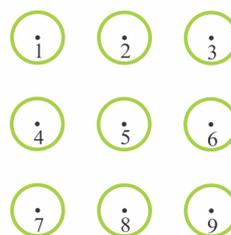


figura 3

Assim, toda linha poligonal é associada a uma sequência de quatro ou mais algarismos, os quais aparecem na senha na mesma ordem em que são visitados. Na figura 1 acima, por exemplo, a senha é 218369, caso o primeiro ponto visitado tenha sido o 2. Note que o segmento ligando os pontos associados aos algarismos 3 e 9 inclui o ponto associado ao algarismo 6. Se o primeiro ponto visitado fosse o 9, então a senha seria 963812. Se o primeiro ponto visitado fosse o 6, então a senha seria 693812. Note que o 6 seria pulado, já que não poderia repetir.

- Por que a linha na figura 2 corresponde a uma única senha? Qual é essa senha?
- Quantas senhas estão associadas a exatamente três lados consecutivos de um quadrado?
- Quantas senhas diferentes de quatro algarismos possuem dois segmentos colineares (segmentos que estão na mesma reta)?