Vingança Olímpica

Janeiro 2016

1. Considere a sequencia $(a_1, a_2, a_3, ...)$ definida por: $a_1 = 1$, $a_2 = 7$ e $a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$ para todo inteiro positivo n . Determine todos os valores de n para os quais existe um inteiro k tal que $a_n = 2k^2 + 1$.

2. Seja S um subconjunto dos naturais não nulos tal que $\mathbb{N}^* - S$ é finito. Seja A_i o número de partições de i com todas as partes no conjunto S. Prove que existe N tal que $A_{i+1} > A_i$, para todo $i > N$.

3. Seja Γ uma circunferência fixa. Determine os conjuntos finitos S de pontos em Γ de tal modo que, para cada ponto P na circunferência, podemos dividir S em dois conjuntos disjuntos A e B de modo que a soma das distâncias de P aos pontos do conjunto A seja igual à soma das distâncias de S aos pontos do conjunto B.

4. Sejam Ω e Γ duas circunferências tais que Ω está no interior de Γ. Seja P um ponto em Γ. Defina A e B os encontros das duas tangentes de P à Ω com Γ, com P diferente de A e B. Prove que, ao variarmos P em Γ, a reta AB será tangente a uma circunferência fixa.

5. Seja T o conjunto das sequências infinitas de inteiros. Dados dois elementos de T, $(a_1, a_2, a_3, ...)$ e $(b_1, b_2, b_3, ...)$, definiremos a soma $(a_1, a_2, a_3, ...) + (b_1, b_2, b_3, ...)$ como $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ...)$. Seja $f : T \to \mathbb{Z}$ uma função tal que:

i) Se $x \in T$ é tal que um dos elementos de sua sequência é igual a 1 e todos os termos restantes são iguais a 0 então $f(x) = 0$;

ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in T$.