IV Vingança Olímpica
Ibiúna – SP
23 de janeiro de 2005

Duração da Prova: 5 horas
Cada problema vale 20 pontos
Não será permitido o uso de calculadoras, computadores ou consulta a qualquer tipo de material.

Problema 1:
Seja $S = \{1, 2, ..., n\}$, n ímpar. Calcule a paridade do número de permutações $\sigma : S \to S$ de modo que a seqüência definida por $a(i) = |\sigma(i) - i|, i \in S$, seja monótona.
Obs.: uma seqüência é dita monótona se é não-crescente ou não-decrescente.

Problema 2:
Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência S. Sejam r e s as retas tangentes a S passando por A e D, respectivamente. Sejam também $E = r \cap BC$, $F = s \cap BC$, $X = r \cap s$, $Y = AF \cap DE$ e $Z = AB \cap CD$. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.
Obs.: assuma a existência de todos os pontos considerados acima.

Problema 3:
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:
$$f(yf(x) + x) + f(xf(y) - y) = f(x) - f(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 4:
Seja A uma matriz simétrica tal que a soma de cada linha é zero. Mostre que a diagonal da matriz cofatora de A possui todas as entradas iguais.
Obs.: a matriz cofatora de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é igual a $B = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Problema 5:
Encontre todos os conjuntos finitos X de pontos no plano, não todos colineares, satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer duas circunferências distintas, cada uma passando por três pontos distintos de X, a interseção delas também está contida em X.

Problema 6:
Zé Roberto e Humberto disputam o jogo do Milênio: são dadas 30 caixas vazias numa fila e cada jogador, na sua vez, coloca uma pedra em uma das caixas ainda vazias. Ganha quem, após sua jogada, conseguir que três caixas consecutivas estejam cheias. Se Zé Roberto inicia o jogo, quem tem a estratégia vencedora?

Boa Sorte!