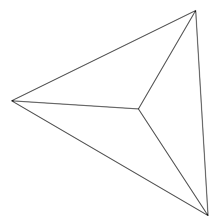
IV OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

maio de 1998

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 20 de maio.

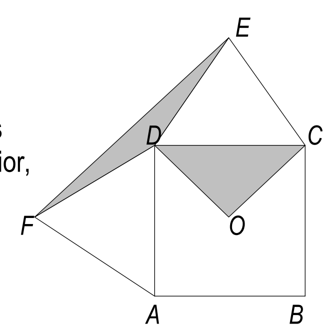
PROBLEMA 1:
Com seis varetas se construi uma peça como a da figura.
As três varetas exteriores são iguais entre si. As três varetas interiores são iguais entre si.
Se deseja pintar cada vareta de uma cor só de modo que em cada ponto de união, as três varetas que chegam tenham cores diferentes.
As varetas só podem ser pintadas de azul, branco, vermelho ou verde.
De quantas maneiras pode-se pintar a peça?



PROBLEMA 2:
Tem-se 1998 peças retangulares de 2cm de altura e 3cm de comprimento e com elas se armam quadrados (sem superposições nem buracos). Qual é a maior quantidade de quadrados diferentes que se pode ter ao mesmo tempo?

PROBLEMA 3:
Existem quatro botes numa margem de um rio, seus nomes são Oito, Quatro, Dois e Um, porque essas são as quantidades de horas que demora cada um deles em cruzar o rio. Pode-se atar um bote a outro, porém não mais de um, e então o tempo que demoram em cruzar é igual ao do mais lento dos botes. Um só marinheiro deve levar todos os botes até à outra margem do rio. Qual é a menor quantidade de tempo que precisa para completar o translado?

PROBLEMA 4:
ABCD é um quadrado de centro *O*. Sobre os lados *DC* e *AD* foram construidos os triângulos equiláteros *DAF* e *DCE*. Decida se a área do triângulo *EDF* é maior, menor ou igual à área do triângulo *DOC*.



PROBLEMA 5:
Escolha um número de quatro cifras (nenhuma delas zero) e começando com ele construa uma lista de 21 números distintos, de quatro cifras cada um, que satisfaça a seguinte regra: depois de escrever cada novo número da lista devem-se calcular todas as médias entre duas cifras desse número, descartando-se as médias que não dão um número inteiro, e com os que restam se forma um número de quatro cifras que ocupará o lugar seguinte na lista. Por exemplo, se na lista se escreveu o número 2946, o seguinte pode ser 3333 ou 3434 ou 5345 ou qualquer outro número armado com as cifras 3, 4 ou 5.

IV OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

maio de 1998

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 20 de maio.

PROBLEMA 1:
Ines escolheu quatro dígitos distintos do conjunto {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos eses números de quatro cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Ines escolheu.

PROBLEMA 2:
ABC é um triângulo equilátero. N é um ponto do lado AC tal que $\overline{AC} = 7.\overline{AN}$, *M* é um ponto do lado *AB* tal que *MN* é paralelo a *BC* e *P* é um ponto do lado *BC* tal que *MP* é paralelo a *AC.* Encontre a fração $\dfrac{área(MNP)}{área(ABC)}$.

PROBLEMA 3:
Dado um tabuleiro quadriculado de 4x4 com cada casa pintada de uma cor distinta, deseja-se cortá-lo em dois pedaços de igual área mediante um corte só que siga os lados das casas do tabuleiro. De quantas maneiras pode-se fazer isto?

Obs. Os pedaços em que se divide o tabuleiro devem ser peças inteiras; não devem ser desconectados pelo corte.

PROBLEMA 4:
O chão do patio tem desenhado um octógono regular.
Emiliano escreve nos vértices deste os números de 1 a 8 em qualquer ordem. Deixa uma pedra no ponto 1.
Caminha em direção ao ponto 2, e havendo recorrido 1/2 do caminho se detém e deixa a segunda pedra.
Daí caminha em direção ao ponto 3, e havendo recorrido 1/3 do caminho se detém e deixa a terceira pedra.
Daí caminha em direção ao ponto 4, e havendo recorrido 1/4 do caminho se detém e deixa a quarta pedra.
Deste modo segue até que, depois de deixar a sétima pedra, caminha em direção ao ponto 8, e havendo recorrido 1/8 do caminho deixa a oitava pedra.

A quantidade de pedras que ficarem no centro do octógono depende da ordem em que ele escreveu os números nos vértices. Qual é a maior quantidade de pedras que podem ficar no centro?

PROBLEMA 5:
O planeta X31 tem só dois tipos de notas, mas o sistema não é tão mau já que só há quinze preços inteiros para os quais o pagamento não pode ser feito de forma exata (nesses casos deve-se pagar a mais e receber o troco). Se 18 é um dos preços para os quais não se pode fazer pagamento exato, encontre o valor de cada tipo de nota.