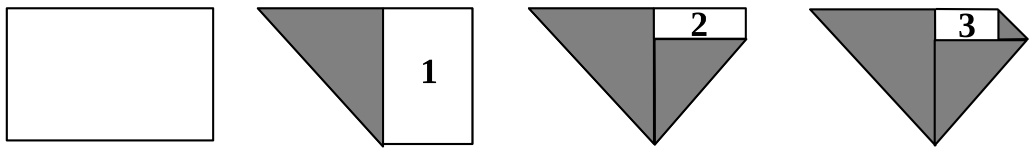
VIII OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

11 de maio de 2002

PROBLEMA 1
Um grupo de homens, alguns dos quais acompanhados pelas esposas, gastaram 1000 dólares num hotel. Cada homen gastou 19 dólares e cada mulher, 13 dólares.
Determine quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel.

PROBLEMA 2
Uma folha de papel retangular (branca de um lado e cinza do outro) foi dobrada três vezes, como mostra a figura abaixo:



O retângulo 1, que ficou da cor branca após a primeira dobra, tem 20cm a mais de perímetro que o retângulo 2, que ficou branco após a segunda dobra, e este por sua vez tem 16cm a mais de perímetro que o retângulo 3, que ficou branco após a terceira dobra. Determine a área da folha.

PROBLEMA 3
Mustafá comprou um tapete. O vendedor mediu o tapete com uma régua que supostamente media um metro. Como o resultado foi que o tapete tinha 30 metros de largura e 20 metros de comprimento, o vendedor cobrou 120000 rupias. Quando Mustafá chegou a sua casa mediu novamente o tapete e percebeu que o vendedor tinha cobrado 9408 rupias a mais. Quantos centímetros mede a régua usada pelo vendedor?

PROBLEMA 4
Num banco só o diretor conhece o segredo do cofre, que é um número de cinco dígitos. Para proteger este segredo são dados a cada um dos dez empregados do banco um número de cinco dígitos. Cada um destes números tem numa das cinco posições o mesmo dígito que o segredo e nas outras quatro posições um dígito diferente do que tem o segredo nesse lugar. Os números de proteção são:

07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237, 97665.

Qual é o segredo do cofre?

PROBLEMA 5
Encontre o máximo número de caixinhas de $3 \times 5 \times 7$ que podem ser colocadas dentro de uma caixa de $11 \times 35 \times 39$. Para o número encontrado, indique como colocar essa quantidade de caixinhas dentro da caixa.

VIII OLIMPÍADA DE MAIO
SEGUNDO NÍVEL

11 de maio de 2002

PROBLEMA 1

Utilizando cubinhos brancos de lado 1 foi montado um prisma (sem buracos).
As faces do prisma foram pintadas de preto. Sabe-se que os cubinhos que ficaram com exatamente 4 faces brancas são 20 no total. Determine quais podem ser as dimensões do prisma. Encontre todas as possibilidades.

PROBLEMA 2

Seja k um número inteiro positivo fixo, $k \leq 10$.
Dada uma lista de dez números, a operação permitida é: escolher k números da lista, e somar 1 a cada um deles. Obtém-se assim uma nova lista de dez números.
Se inicialmente temos a lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, determine os valores de k para os quais é possível, mediante uma seqüência de operações permitidas, obter uma lista que tenha os dez números iguais. Indique a seqüência para cada caso.

PROBLEMA 3

Num triângulo ABC, retângulo em A e isósceles, seja D um ponto do lado AC ($D \neq A$ e $D \neq C$) e seja E o ponto do prolongamento do lado BA tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio do segmento BD, R é o ponto médio do segmento CE e Q o ponto onde se cortam as retas ED e BC, demonstre que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

PROBLEMA 4

Os vértices de um polígono regular de 2002 lados estão numerados de 1 a 2002, no sentido horário. Dado um inteiro n, $1 \leq n \leq 2002$, pinta-se de azul o vértice n, logo, seguindo o sentido horário, contam-se n vértices começando no seguinte de n, e pinta-se de azul o número n. E assim sucessivamente, a partir do vértice que segue ao último vértice que há sido pintado, contam-se n vértices, pintados ou sem pintar, e o número n é pintado de azul. Quando o vértice que tem que ser pintado já é azul, o processo pára. Denotamos $P(n)$ ao conjunto de vértices azuis que se obtém com este procedimento quando se começa pelo vértice n. Por exemplo, $P(364)$ está formado pelos vértices 364, 728, 1092, 1456, 1820, 182, 546, 910, 1274, 1638 e 2002.
Determine todos os inteiros n, $1 \leq n \leq 2002$, tais que $P(n)$ tem exatamente 14 vértices.

PROBLEMA 5

Dados x e y inteiros positivos, consideramos um quadriculado de $x \times y$, que tem pintados de vermelho os $(x + 1) \cdot (y + 1)$ pontos que são vértices de quadradinhos. Inicialmente há uma formiga em cada um dos pontos vermelhos. Num instante dado, todas as formigas começam a caminhar pelas linhas do quadriculado, todas com a mesma velocidade. Cada vez que chegam num ponto vermelho, giram 90° em alguma direção.
Determine todos os valores de x e y para os quais é possível que as formigas continuem movendo-se indefinidamente de maneira que em nenhum momento há duas ou mais formigas num mesmo ponto vermelho. (Não interesam as possíveis coincidencias em pontos das linhas do quadriculado que não são vermelhos.)