Capítulo 1

Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos é um dos métodos de demonstração mais utilizados em competições de matemática. Também é conhecido em alguns países (na Rússia, por exemplo) como *Princípio de Dirichlet* em homenagem ao matemático Lejeune Dirichlet, o primeiro matemático a usa este método para resolver problemas não triviais. Outros matemáticos que se destacaram por usarem essa ideia para resolver diversos problemas foram os húngaros Erdős e Szekeres. Sua versão mais simples é a seguinte:

"Se em n caixas são postos $n + 1$ pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo."

Alguns Exemplos:

(i) Em um grupo de três pessoas, pelo menos duas delas são do mesmo sexo.

(ii) Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas têm o mesmo signo.

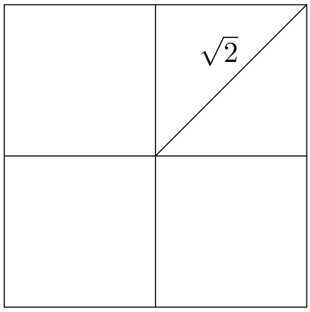
(iii) Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.

(iv) Na cidade de Fortaleza, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Agora vamos ver como algo tão simples pode resolver problemas aparentemente difíceis:

Problema 1.1. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois deste pontos estão em um distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução. Divida o quadrado em quatro quadrados menores como na figura ao lado. Como temos cinco pontos e quatro quadrados, teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Como a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal, o resultado segue de imediato. □



1. Formalizando o método

Para o aluno iniciante, a solução do problema anterior pode ter parecida um pouco mágica. Vamos mostrar que não é bem assim, que existe um método na solução de alguns problemas simples que usam a idéia da casa dos pombos.

A primeira coisa que devemos aprender a reconhecer é quando um problema se trata de um problema sobre casa dos pombos. Isso pode ser ganho com experiencia, mas vamos dar um empurãozinho para você. Um problema de PCP tem quase sempre a seguinte cara:

Dado um conjunto de n **objetos**, *prove que podemos escolher k deles satisfazendo uma* **propriedade**.

Bem, depois de identificar que o enunciado do problema no traz a idéia de usar PCP, devemos nos concentrar em responder as seguintes perguntas:

(i) **Quem são os pombos?**
(ii) **Quantas são as casas?**
(iii) **Quem são as casas?**

Quase sempre as duas primeiras perguntas são as mais fáceis de serem respondidas. Para responder a terceira pergunta devemos pensar no conceito dual de *espaço amostral.* Por um lado, o espaço amostral é o conjunto das possíveis posições dos pombos. Por outro, é a união de todas as casas.

Para finalizar, devemos separar o espaço amostral no número de casas já descoberto. Nessa hora é importante lembrar que as casas devem fletir a propriedade desejada.

Como acabamos de ver, usar o princípio da casas dos pombos não é difícil. O difícil está em achar o que serão nossos "pombos" e "caixas". O próximo problema é, *a priori*, um problema de teoria dos números. Porém, vamos usar o princípio da casa dos pombos para resolvê-lo.

Problema 1.2. Prove que dados sete inteiros positivos, existem dois cuja soma ou a diferença é um múltiplo de 10.

Solução. Vamos montar seis caixas $C_0, C_2, ..., C_5$ onde um inteiro está na caixa C_i se é congruente a i ou a $-i$ módulo 10. Sabemos que existirão dois inteiros na mesma caixa. Dessa forma, se eles forem incongruentes módulo 10, basta somá-los. Caso contrário, faça a sua diferença. □

Problema 1.3. Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.

Solução. Podemos separar os pontos de coordenadas inteiras (que é representado por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) em quatro grupos G_1, G_2, G_3, G_4 como a seguir.

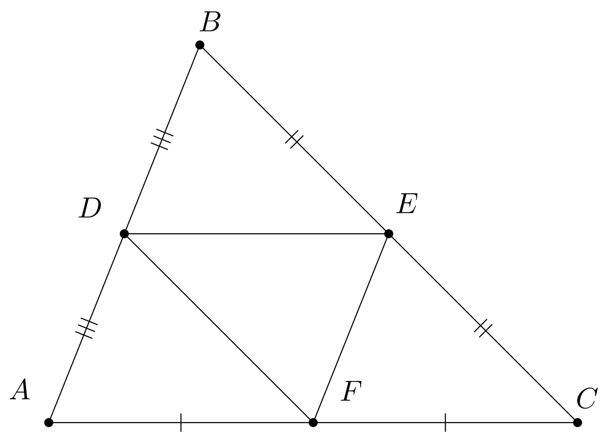
(i) $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x, y$ são ambos pares$\}$.
(ii) $G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x, y$ são ambos ímpares$\}$.
(iii) $G_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x$ é par e y é ímpar$\}$.
(iv) $G_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x$ é ímpar e y é par$\}$.

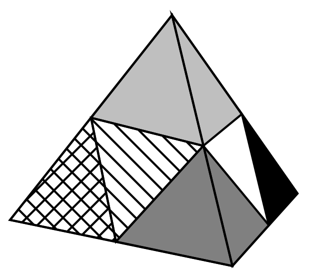
Observe que pontos que pertencem ao mesmo grupo, possuem pontos médios com coordenadas inteiras. Como temos 5 pontos, o princípio da casa dos pombos nos garante que há pelo menos dois pontos no mesmo grupo. □

Problema 1.4. Nove pontos são colocados no inteirior de um trângulo de área $4cm^2$. Prove que podemos escolher três deles que são vértices de um triângulo de área no máximo igual a $1cm^2$.

Problema 1.5. Nove pontos são postos sobre a superfície de um tetraedro regular com $1cm$ de aresta. Prove que detre esses pontos é possível acahr dois com distância (espacial) não maior que $0.5cm$.

Solução. Vamos particionar a superfície do tetraedro em 16 triângulos eqüiláteros congruentes, dividindo cada face em quatro partes usando suas bases médias. Agora vamos criar 8 regiões pitando esses triângulos de acordo com a seguinte regra: os triângulos que possuem um mesmo vértice do tetraedro serão pintados da mesma cor; dessa forma já usamos quatro cores diferentes para 12 triângulos e os outros quatro vamos pintar usando as demais cores. De acordo com o Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos dois dos nove pontos estarão na mesma região. Fica apenas faltando que





a distância máxima entre dois pontos da mesma região é no máximo $0.5cm$. $\square$

2. Problemas Propostos

Problema 1.6. Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.

Problema 1.7. Em um grupo de 20 prove que existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos.

Problema 1.8. Em cada casa de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números $-1, 0, 1$. Prove que, dentre as oito somas ao longo de uma mesma linha, coluna ou diagonal, existem duas iguais.

Problema 1.9. Prove que em um conjunto de cinco inteiros quaisquer, sempre há três cuja soma é divisível por 3.

Problema 1.10. Prove que em um conjunto de 15 inteiros positivos distintos menores que 101 sempre podemos escolher quatro deles a, b, c, d tais que $a + b = c + d$ ou $a + b = 2c$.

Problema 1.11. Prove que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

Problema 1.12. Prove que existe uma potência de 3 terminada nos dígitos 001 (na base decimal).

Problema 1.13. Mostre que um triângulo eqüilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos eqüiláteros menores.

Problema 1.14. (Longlist IMO 1977 - Romênia) Dados 37 pontos no espaço com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos triângulos formado por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Problema 1.15. Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8×8. Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra.

Problema 1.16. (Longlist IMO 1979 - Bulgária) Colocamos $4n+1$ reis em um tabuleiro infinito. Prove que podemos escolher $n+1$ deles de modo que não existam dois que se ataquem.

Problema 1.17. Prove que de qualquer subconjunto de $n + 1$ elementos do conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ é possível escolher dois que sejam primos entre si.

Problema 1.18. (Rioplatense 2017) João tem 13 cartas, cada uma tem um lado verde e um lado azul. Em cada lado de cada carta é escrito um número inteiro. Prove que podemos escolher três cartas de modo que a soma dos três números escritos nas faces azuis é múltiplo de 3 e a soma dos três números escritos nas faces verdes também seja é múltiplo de 3

Problema 1.19. Cada casa de um tabuleiro 3×7 é pintado de preto ou branco. Mostre que é possível achar um retângulo (com lados paralelos aos do tabuleiro) cujas quatro pontos são da mesma cor.

Problema 1.20. (Bielorússia 2007 - adaptado) Os pontos de um plano são pointados usando três cores. Prove que existe um triângulo isósceles monocromático.

Problema 1.21. (Leningrado) Considere 70 inteiros positivos distintos menores ou iguais a 200. Prove que existem dois deles cuja diferença é 4, 5 ou 9.

Problema 1.22. (Torneio das Cidades 1998) Em um tabuleiro 8×8, 17 casas são marcadas. Prove que é possível escolher duas dessas casas marcadas de modo que um cavalo de xadrez leve pelo menos três movimentos para ir de uma a outra.

Problema 1.23. (Teste Cone Sul) Os inteiros $1, 2, \ldots, 200$ são divididos em 50 conjuntos. Mostre que pelo menos um desses 50 conjuntos contém três números distintos que podem ser medidas dos lados de um mesmo triângulo.

Problema 1.24. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo de outro. Isso pode ser evitado com n números?

Problema 1.25. Existe algum conjunto A formado por sete inteiros positivos, nenhum dos quais maior que 24, tal que as somas dos elementos de cada um dos seus 127 subconjuntos não-vazios sejam distintas duas a duas?

Problema 1.26. Um pentágono convexo tem todos seus vértices sendo pontos de coordenadas inteiras. Prove que existe um ponto de coordenadas inteiras no interior deste pentágono.

Problema 1.27. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Cada ponto de uma circunferência é colorido com uma dentre n cores. Prove que existe um trapézio inscrito na circunferência com todos os seus vértices pintados da mesma cor.

Problema 1.28. Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Agora suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C. Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S.

3. Problemas sem solução

Problema 1.29. (IMO 1972) Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

Problema 1.30. Quarenta estudantes participaram de uma olimpíada de matemática. A prova consistia de cinco problemas ao todo. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 23 participantes. Prove que deve existir dois participantes tais que todo problema foi resolvido por pelo menos um deles dois.

Problema 1.31. Prove que em qualquer grupo de 17 números escolhidos do conjunto

$$M = \{1, 2, 3, ..., 24, 25\}$$

é possível escolher dois cujo produto é um quadrado perfeito.

Problema 1.32. Mostre que para todo $n > 1$ de qualquer subconjunto de $n + 2$ elementos do conjunto $1, 2, ..., 3n$ podemos escolher dois cuja a diferença é maior que n e menor que $2n$.

Problema 1.33. Em uma sapataria existem 200 botas de tamanho 41, 200 botas de tamanho 42, e 200 botas de tamanho 43. Dessas 600 botas, 300 são para o pé esquerdo e 300 para o direito. Prove que existem pelo menos 100 pares de botas usáveis.

Problema 1.34. Onze estudantes formaram cinco grupos de estudo. Prove que existem dois alunos A e B, tais que em todo grupo que inclui A também inclui B.

Problema 1.35. (Torneio das Cidades 1994) Existem 20 alunos em uma escola. Quaisquer dois deles possui um avó em comum. Prove que pelo menos 14 deles possui um avó em comum.

Problema 1.36. (Rússia 1997) Uma sala de aula possui 33 alunos. Cada aluno tem uma música e um cantor favorito. Certo dia, cada um deles perguntou aos demais suas músicas e catores favoritos. Em seguida, cada um falou dois números, o primeiro era a quantidades de alunos que gostavam da mesma música e o segundo, a quantidade de alunos que tinham o mesmo cantor favorito. Sabe-se que cada um dos números de 0 a 10 apareceu entre as respostas. Mostre que existem dois alunos que gostam do mesmo cantor e da mesma música.

Problema 1.37. Suponha que para algum inteiro $k \geq 1$ a soma de $2k + 1$ inteiros positivos distintos é menor que $(k+1)(3k+1)$. Mostre que existem dois deles cuja soma é $2k + 1$.

Problema 1.38. (USAMO 1985) Em uma festa há n pessoas. Prove que existem duas pessoas tais que, das $n - 2$ pessoas restantes é possível achar $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ onde cada uma delas conhece ou não conhecem ambas.

Problema 1.39. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 1.40. (Putnam) O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

Problema 1.41. O plano é totalmente pintado usando duas cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

Problema 1.42. (IMO 1983) Cada ponto do perímetro de um triângulo eqüilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.

Problema 1.43. Nove pontos de um icoságono regular são pintados de vermelho. Prove que podemos encontrar três deles formando um triângulo isósceles.

Problema 1.44. (Rússia 2004) Cada ponto de coordenadas inteiras é pintado de uma de três cores, sendo cada cor usada pelo menos uma vez. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo cujos vértices são de cores distintas.

Problema 1.45. O plano é pintado usando três cores. Prove que podemos encontrar um triângulo retângulo isósceles com os três vértices da mesma cor.