Salvador, 24 de julho de 2012

Primeiro Dia

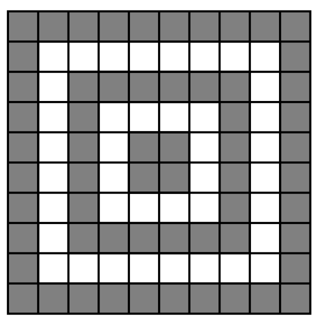
Tempo 4h30min

Cada problema vale 7 pontos

Problema 1
Arnaldo e Bernaldo treinam para uma maratona ao longo de uma pista circular, a qual possui em seu centro um mastro com uma bandeira hasteada. Arnaldo corre mais rápido que Bernaldo, de modo que a cada 30 minutos de corrida, enquanto Arnaldo dá 15 voltas na pista, Bernaldo só consegue dar 10 voltas completas.

Arnaldo e Bernaldo partiram no mesmo instante da linha inicial e correram com velocidades constantes, ambos no mesmo sentido. Entre o minuto 1 e o minuto 61 da corrida, quantas vezes Arnaldo, Bernaldo e o mastro ficaram colineares?

Problema 2
Maria dispõe de um tabuleiro de tamanho $n \times n$, inicialmente com todas as casas pintadas de cor branca. Maria decide pintar algumas casas do tabuleiro de preto, formando um mosaico, como mostra a figura abaixo, da seguinte maneira: ela pinta todas as casas do bordo do tabuleiro de preto, e em seguida deixa pintadas de branco as casas do bordo do tabuleiro que ainda não foi pintado. Então, pinta novamente de preto as casas do bordo do próximo tabuleiro restante, e assim sucessivamente.



a) Determine um valor de n para que o número de casas pretas seja igual a 200.
b) Determine o menor valor de n para que o número de casas pretas seja maior que 2012.

Problema 3
Seja n um inteiro positivo. Abigail e Berenice disputam o seguinte jogo, que utiliza n bolas numeradas de 1 até n. Elas dispõem de duas caixas, rotuladas com os símbolos $\mathbf{\Pi}$ e $\mathbf{\Sigma}$, respectivamente.

Na sua vez, cada jogador escolhe uma bola e a coloca em uma das caixas. Ao final, os números das bolas que estão na caixa $\mathbf{\Pi}$ são multiplicados, obtendo-se um valor P e os números das bolas que estão na caixa $\mathbf{\Sigma}$ são somados, obtendo-se um valor S (se a caixa $\mathbf{\Pi}$ estiver vazia, então adotamos $P = 1$; se a caixa $\mathbf{\Sigma}$ estiver vazia, adotamos $S = 0$). Elas jogam alternadamente, iniciando por Abigail, até que não haja mais bolas fora das caixas.

Se o valor de $P + S$ for par, Abigail ganha. Caso contrário, Berenice ganha.

a) Qual jogador possui estratégia vencedora para $n = 6$?
b) Qual jogador possui estratégia vencedora para $n = 2012$?

Salvador, 25 de julho de 2012

Segundo Dia

Tempo 4h30min

Cada problema vale 7 pontos

Problema 4
Uma formiga decide passear sobre o perímetro de um triângulo ABC. A formiga pode começar em qualquer vértice. Sempre que a formiga está num vértice, ela escolhe um dos vértices adjacentes e caminha diretamente (em linha reta) até o vértice escolhido.

a) De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vértice exatamente duas vezes?
b) De quantos modos a formiga pode passear visitando cada vértice exatamente três vezes?

Observação: Em cada item, considere que o vértice inicial é visitado.

Problema 5
Arnaldo e Bernaldo estão brincando no quadro da sala de aula da seguinte maneira: eles escrevem inicialmente no quadro um número inteiro positivo n. Então, alternadamente, começando com Arnaldo, apagam o número que está no quadro e escrevem um novo número que pode ser:

• o que acabou de ser apagado menos a maior potência de 2 (com expoente inteiro não-negativo) menor do que ou igual ao número apagado;
• o que acabou de ser apagado dividido por 2, caso o número apagado seja par.

Vence a brincadeira quem obtiver primeiro o número zero.

a) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 40$ e descreva-a.
b) Determine qual dos jogadores possui uma estratégia vencedora para $n = 2012$ e descreva-a.

Problema 6
Um quadrilátero $ABCD$ está inscrito numa circunferência de centro O. Sabe-se que as diagonais AC e BD são perpendiculares. Sobre cada um dos lados construímos semicírculos, externamente, como mostra a figura.

a) Mostre que os triângulos AOB e COD têm a mesma área.
b) Se $\overline{AC} = 8\ cm$ e $\overline{BD} = 6\ cm$, determine a área da região sombreada.