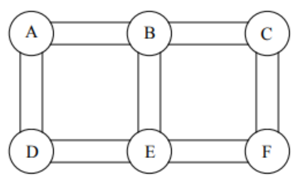
Probabilidade na OBMU

Alan Anderson

6 de janeiro de 2018

2001. Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola A e treinado para mudar de gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolher qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade sem ser afetados por escolhar anteriores. Qual é a probabilidade de que depois do alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola B?



2002. Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6). Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

2003. O tenista Berrando Gemigemi tem 30 dias para preparar-se para um torneio. Se ele treina 3 dias seguidos ele tem fadiga muscular. Ele, então, decide que, durante esses 30 dias, irá treinar 20 dias, sem nunca treinar 3 dias seguidos, e descansar nos outros 10 dias. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher os 10 dias de descanso?

2004. Quantas triplas ordenadas (A, B, C) de subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$ existem para as quais $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$?

2006. Escolha três pontos x_1, x_2, x_3 aleatoriamente, independentemente e com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Determine, em função do número positivo m, a probabilidade de que

$$\min\{|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|\} > m.$$

2007. Joãozinho joga repetidamente uma moeda comum e honesta. Quando a moeda dá cara ele ganha 1 ponto, quando dá coroa ele ganha 2 pontos. Encontre a probabilidade (em função de n) de que Joãozinho em algum momento tenha exatamente n pontos.

2008. Esmeralda passeia pelos pontos de coordenadas inteiras do plano. Se, num dado momento, ela está no ponto (a, b), com um passo ela pode ir para um dos seguintes pontos: $(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1)$ ou $(a, b-1)$. De quantas maneiras Esmeralda pode sair do $(0, 0)$ e andar 2008 passos terminando no $(0, 0)$?

2009. . A rã Dõ descansa sobre o vértice A de um triângulo equilátero ABC. A cada minuto a rã salta do vértice em que está para um vértice adjacente, com probabilidade p de o salto ser no sentido horário e $1-p$ de ser no sentido anti-horário, onde $p \in (0, 1)$ é uma constante. Seja P_n a probabilidade de, após n saltos, Dõ estar novamente no vértice A.

(a) Prove que, qualquer que seja $p \in (0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} P_n = 1/3$.

(b) Prove que existe $p \in (0, 1/100)$ tal que, para algum $n \in N$, $P_n = 1/\pi$.

2010. Suponha que temos um grafo com $n+1 \geq 4$ vértices e queremos pintar suas arestas com duas cores de forma que não haja duas arestas disjuntas da mesma cor. Mostre que há no máximo 2^n tais colorações.

Observações: Um grafo é formado por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, cada aresta unindo dois vértices distintos e cada par de vértices sendo unido por no máximo uma aresta. Arestas disjuntas são arestas que não têm vértices em comum.

2011. Zé Roberto precisa sortear alguns números primos para elaborar uma questão de teoria dos números para a Olimpíada de Matemática. Ele resolve jogar um dado comum e ir somando os pontos até alcançar um primo. Ele pede para o seu filho mais velho Umberto ir anotando as respostas. Da primeira vez que ele joga o dado sai o número 2. Umberto anota que o primeiro primo será $p_1 = 2$. No segundo lançamento sai 1. Como 1 não é primo, Zé Roberto volta a lançar o dado e desta vez sai 4. Umberto anota que o segundo primo será $p_2 = 5$. Zé Roberto lança o dado novamente e obtém 6. Neste momento seu segundo filho Doisberto, que assistia ao sorteio, declara: "Tenho a intuição de que o próximo primo será $p_3 = 11$.". Zé Roberto fica um pouco surpreso mas decide continuar a lançar o dado normalmente. Qual a probabilidade de que o palpite de Doisberto venha a se confirmar?

2013. Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade $1/2$ para cada vértice. Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

2014. Zé Pantera percorre um caminho em $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ guiado por um dado. Começa em 0 e a cada segundo joga um dado honesto, obtendo um número s entre 1 e 6; se está em x pula para $x + s$. Seja x_n a probabilidade de Zé Pantera estar em n em algum momento. Prove que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ e determine esse limite.

2015. Sejam m e n inteiros positivos, X um conjunto com n elementos e seja $0 \leq k \leq n$ um inteiro. São escolhidos aleatória e independentemente subconjuntos $X_1, X_2, ..., X_m$ de X. Portanto, dado um subconjunto $Y \subset X$ qualquer, a probabilidade de termos, por exemplo, $X_1 = Y$ é igual a $1/2^n$. Calcule a probabilidade de $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m$ possuir exatamente k elementos.

2015. Randonaldo escolhe ao acaso dois números reais b e c do intervalo $[0, \alpha]$ (ou seja, tanto b como c têm distribuição uniforme no intervalo $[0, \alpha]$), e resolve a equação $x^2 + bx + c = 0$. A probabilidade de a equação ter soluções reais é $1/2$. Qual é o valor de α?