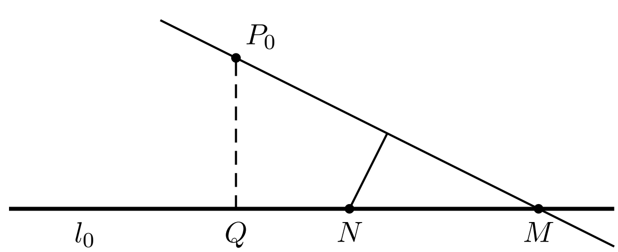
Princípio do Extremo

A idéia chave na solução de muitos problemas de combinatória, ou até mesmo em teoria dos números e álgebra é a simples consideração de um elemento extremo (máximo ou mínimo). O próximo problema mostrará como essa idéia pode ser simples e ao mesmo tempo poderosa.

Problema 1. (Leningrado 1988) Alguns pinos estão em um tabuleiro de xadrez. A cada segundo, um dos pinos move para uma casa vizinha (lado em comum). Após muito tempo verificou-se que cada pino havia passado todos todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e tinha voltado para a sua casa inicial. Prove que existiu um momento em que todos os pinos estavam fora de sua casa inicial.

Solução. Seja P o primeiro pino que voltou para a sua posição inicial. Um movimento antes dele voltar para sua casa, cada um dos outros pinos deve ter feito um movimento. De fato, se isso não fosse verdade, P não poderia ter passado por todas as casas do tabuleiro. Desse modo, este será o momento em que todos os pinos estarão em casas diferentes das iniciais. $\square$

Problema 2. (Teorema de Sylverste) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a propriedade que qualquer reta que passa por dois destes pontos também passa por um terceiro. Prove que todos os pontos estão sobre uma reta.



Solução. Seja L o conjunto de todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de S. Agora sejam $P_0 \in S$ e $l_0 \in L$ tais que a distância entre P_0 e l_0 é a menor possível porém, diferente de zero. Seja Q a projeção de P_0 sobre l_0. Como a reta l_0 passa por três deles, pelo menos dois deles N e M estão na mesma semi-reta (em relação a Q). Suponha que N é o mais próximo de Q desse modo, a distância entre N e a reta P_0M é menor que a mínima. Contradição. $\square$

Problema 3. (Leningrado 1989) Dado um número natural k maior que 1, prove que é impossível colocar os números $1, 2, ..., k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que todas as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam potências de 2.

Solução. Suponha que seja possível fazer tal distribuição para algum inteiro positivo k. Além disso, seja 2^n a menor dentre as somas. Devemos ter

$$2^n \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Como 2^n é menor potência, 2^n divide a soma dos elementos em qualquer linha, portanto divide a soma de todos os elementos do tabuleiro. Assim,

$$2^n \mid \frac{k^2(k^2+1)}{2}.$$

Como k^2 e k^2+1 tem paridades opostas, 2^{n+1} deve dividir apenas um deles. Em qualquer caso temos $2^{n+1} \leq k^2 + 1$. Isso contradiz a primeira desigualdade encontrada. $\square$

Problema 4. (São Petersburgo 1998) Em cada uma de dez folhas de papel são escritas diversas potências de 2. A soma dos números em cada uma das folhas é a mesma. Mostre que algum número aparece pelo menos 6 vezes.

Solução. Seja N a soma comum, e n o maior inteiro tal que $2^n \leq N$. Suponha que cada potência só ocorra no máximo 5 vezes. Dai,

$$5(1 + 2 + \cdots + 2^n) = 5(2^{n+1} - 1) < 10N.$$

E isso gera uma contradição. $\square$

Problemas Propostos

Problema 5. Dado um conjunto de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

Problema 6. São dados $n \geq 3$ pontos no plano de forma que quaisquer três estão em um triângulo de área menor que 1. Mostre que todos eles estão em um triângulo de área menor que 4.

Problema 7. São dados n pontos no plano. Marcamos então, os pontos médios de todos os segmentos com extremidades nesses n pontos. Prove que há pelo menos $2n - 3$ pontos marcados distintos.

Problema 8. Há 20 paises em um planeta. Sabe-se que dentre quaisquer três desses países, existe sempre dois sem relações diplomáticas. Prove que existem, no máximo, 200 embaixadas neste platena.

Problema 9. Todo participante de um torneio joga com cada um dos outros participantes exatamente uma vez. Após o torneio cada jogador faz uma lista com os nomes de todos os jogadores vencidos por ele e de todos os que foram vencidos pelos jogadores que ele venceu. Sabendo que neste torneio não há empates, prove que existe um jogador cuja a lista possui o nome de todos os outros jogadores.

Problema 10. Em um pátio estão localizadas $2n + 1$ pessoas tais que as distância entre quaisquer duas delas são todas distintas. Em um dado momento cada uma delas atira na pessoa mais próxima de si. Prove que:

(a) Pelo menos uma pessoa irá sobreviver.

(b) Ninguém levará mais de cinco tiros.

(c) Os caminhos das balas não se encotram.

(d) Os segmentos formados pelas tragetórias das balas não formam um polígono convexo fechado.

Problema 11. Considere três escolas, cada uma com n alunos. Cada estudante tem ao todo $n + 1$ amigos nas outras duas escolas em que ele não estuda. Prove que é possível selecionar um estudante de cada escola de tal forma que os três se conheçam mutuamente.

Problema 12. Em cada *lattice point* do plano é colocado um inteiro positivo. Cada um desses números é a média aritmética de seus quatro vizinhos. Mostre que todos os números são iguais.

Problema 13. Cada casa de um tabuleiro 8×8 existe um número que pode ser 0 ou 1. Para cada casa que contém um 0, a soma dos números escritos nas casas que estão ou na mesma linha ou na mesma coluna desta casa é maior que ou igual a 8. Prove que a soma de todos os números no tabuleiro é maior que ou igual a 32.

Problema 14. O parlamento da Bruzundanga consiste de uma casa. Todo membro tem no máximo três inimigos dentre os restantes. Mostre que é possível separar a casa em duas casas de tal forma que cada membro tenha no máximo um inimigo em sua casa.

Problema 15. (Torneio das Cidades 1987)
(a) $3n$ estrelas são colocadas em um tabuleiro $2n \times 2n$. Prove que podemos eliminar n linhas e n colunas de modo que todas as estrelas sejam eliminadas.
(b) Prove que, com $3n + 1$ estrelas, isso não é mais possível.

Problema 16. (Torneio das Cidades 1983) Os números de 1 a 1000 são escritos ao redor de um círculo. Prove que é possível formar 500 segmentos que não se cruzam, cada um ligando dois destes números, e de tal modo que a diferença (em valor absoluto) entre dois números ligados não seja maior que 749.

Problema 17. (Torneio das Cidades 1985) Oito times de futibol participaram de um torneio com apenas uma rodada onde cada time jogou contra todos os outros exatamente uma vez). Não houve empates. Prove que após o termino do torneio é possível escolher quatro times, digamos A, B, C, D tais que A derrotou B, C e D; B derrotou C e D; e C derrotou D.