Algoritmos e a questão 5 da IMO/2017

Semana Olímpica/2018

Prof. Armando Barbosa

Maceió, 25 de janeiro de 2018

Esse material é um formado por partes do capítulo de algoritmos presente no livro Seletiva Cone Sul 2014

Um assunto cada vez mais frequente na vida de qualquer pessoa é o algoritmo. De forma bem simples, podemos dizer que um algoritmo é uma sequência de passos pré-estabelecidos que resolve um problema. Por exemplo, quando qualquer pessoa pretende marcar um compromisso, como por exemplo uma consulta médica, numa determinada data e hora, ela segue o seguinte algoritmo:

1. Olha a data e hora sugerida pela atendente.
   (a) Se há disponibilidade, então marca a consulta.
   (b) Caso contrário, então pede outra sugestão de data e hora para a atendente.
2. Faz-se os passos anterior até a consulta ser marcada.

Os algoritmos são ferramentas poderosas cada vez mais usadas nos dias atuais, sendo com frequência usados, sem saber que tal estratégia chama-se algoritmo. Por exemplo:

- qualquer motorista usa um algoritmo para chegar a um destino.
- um médico usa algoritmo para determinar que doença o paciente tem, a partir dos sintomas do mesmo.
- um juíz usa algoritmo para fixar a pena de um criminoso, a partir do que está estabelecido no Código Penal.
- um bom advogado usa algoritmo para sugerir a um empresário meios de agir, sem violar qualquer lei.

Os estudos de algoritmos são imprescindíveis aos funcionários de Tecnologia de Informação, pois são eles que elaboram e programam os códigos para executarem um algoritmo. Um exemplo clássico é a aplicação do algoritmo clássico chamado *Bubble Sort* para a organização de uma lista de nomes em ordem alfabética. Por isso, vê-se com bastante frequência o estudo de algoritmos entre os estudantes de olimpíadas de informática. Sobre essa área de computação, convém-se comentar uma aplicação bastante atual de algoritmos na Inteligência Artificial e nos sistemas de Business Inteligence para auxílio de tomadas de decisões gerenciais.

Nas olimpíadas de matemática, também há muitas questões envolvendo algoritmos. O exemplo mais recente aconteceu na IMO/2017, considerada a IMO mais difícil da história até então, onde a questão 5 foi sobre esse tema. Para contextualizar brevemente, apresentemos o algoritmo simplificado, não eficiente, para determinar se um número n é primo:

1. Divida o número n por todo número maior que 1 e menor que n.
2. Se algum dos restos é das divisões do passo anterior é igual a 0, então o número é composto.
3. Caso contrário, n é primo.

Diversas melhorias podem ser aplicadas ao algorítmo acima. Por exemplo, ao invés de dividir até $(n-1)$, poderíamos dividir até $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. O debate sobre eficiência não faz parte do escopo desse material, apesar de ser muito importante para olimpíadas de informática. O objetivo desse material é apresentar algumas técnicas envolvendo algoritmos aplicados a olimpíada de matemática. Para ter uma ideia de como isso pode ser visto, considere o exercício a seguir.

Problema 1 *(Rússia/1998)* Um labirinto é um tabuleiro 8×8, com alguns quadradinhos adjacentes 1×1 separados por muros, é tal que quaisquer dois quadradinhos são conectados por um caminho que não passa por cima de qualquer muro. Dado um comando *CIMA, BAIXO, DIREITA* ou *ESQUERDA*, um peão pode dar um passo na direção correspondente, a menos que ele encontre um muro ou uma borda do tabuleiro. Deus escreve um programa que consiste de uma sequência finita de comandos e entrega ele para o Diabo, que então pode construir um labirinto e colocar um peão em um dos quadradinhos. Deus pode escrever um programa que garanta que o peão vai visitar todos os quadradinhos 1×1 do tabuleiro, ainda que o Diabo se esforce para impedir isso?

Solução: Resposta: Sim

Para isso, Deus pode adotar o seguinte algoritmo para numerar de 1 a 64 os quadradinhos do tabuleiro 8×8:

1. Seja 1 o quadradinho 1×1 mais abaixo e esquerda;
2. Enquanto não chegar ao final da linha, numere o quadradinho adjacente da direita com o número seguinte;
3. Ao chegar ao final da linha, numere o quadradinho mais a esquerda da linha acima com o número seguinte;
4. Enquanto for possível, execute os dois passos anteriores

A aplicação do algoritmo acima gera o tabluleiro a seguir:

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Depois, usando a numeração do algoritmo anterior, Deus pode adotar o seguinte algoritmo para uma possível configuração L_1 qualquer de labirinto:

1. Para todo $i = 1, 2, \cdots, 64$, seja P_i a sequência de comandos que o peão adota para que, começando no quadradinho de número i, ele visite todos os quadradinhos do tabuleiro 8×8;

2. Junte todos os P_i's, sem misturá-los;

3. Chame de P_{L_1} a união de todos os P_i's nesse caso. Isto é:

$$P_{L_1} = P_1, P_2, \cdots, P_{64}$$

Então, para concluir seu programa, Deus pode, usando o algoritmo anterior, aplicar também o algoritmo a seguir:

1. Para cada possível configuração L_j de labirinto, encontre P_{L_j};

2. Junte todos os P_{L_j}'s, sem misturá-los, de forma análoga ao algoritmo anterior.

Como o tabuleiro é finito, então todas as configurações de labirinto é um conjunto grande, mas finito, sendo possível a aplicabilidade do algoritmo anterior. O resultado do algoritmo anterior é suficiente para Deus atingir seu objetivo. ■

Notemos que o exemplo apresentado é uma aplicação do vários algoritmos simples, ou seja, aplicação de vários conjuntos de passos pré-estabelecidos.

Relembremos, como comentado no começo, que não houve qualquer preocupação com eficiência. Por exemplo, na configuração de labirinto que não possui muro, todos os P_i's seriam iguais, de forma que não precisaria ser feito o mesmo algoritmo 64 vezes nessa configuração. Esse debate sobre eficiência é uma diferença entre as olimpíadas de informática e as olimpíadas de matemática: enquanto na computação, quase sempre há limitações de desempenho e memória, na matemática, quase nunca há essa preocupação. Com isso, tenhamos sempre em mente que só haverá preocupação com eficiência em questões de olimpíada de matemática, se o enunciado falar sobre isso. Caso contrário, sigamos aquele príncipio bastante usado que diz o seguinte: "A melhor solução sua para o problema é a que resolve ele".

Para melhor estudo das técnicas de algoritmos em questões de matemática, esse material está dividido nos seguintes tópicos:

- Algoritmo recursivo (bastante usado em Teoria dos Números);

- Algoritmo indutivo;
- A questão 5 da IMO/2017.

Vamos então começar a estudar a aplicação de algoritmos na olimpíada de matemática. Uma última sugestão é que o leitor, em cada exercício resolvido, para melhor aproveitamento do material, siga o seguinte algoritmo:

1. Leia o problema;
2. Antes de começar a ler a solução, pense por 20 minutos ou mais;
3. Depois de pensar o tempo do passo anterior, leia a solução.

1 Algoritmo recursivo

A ideia de ir olhando casos anteriores para analisar um caso maior chama-se recorrência. Um exemplo clássico de recorrência é a própria sequência de Fibonacci.

Na área da programação, a recorrência é a base para uma técnica de muito conhecida e muito aplicada chamada *Programação Dinâmica*, que, por exemplo, é aplicada ao famoso problema da mochila. Para entender melhor, considere o seguinte exemplo: Joãozinho prepara sua mochila para a escola. Ele só pode levar cadernos que somam até 200 folhas, quer levar a maior quantidade de folhas possíveis e tem cadernos de 120 folhas e de 96 folhas. A aplicação do algoritmo guloso recomendaria o caderno de 120 folhas, pois é o maior que cabe, quando a melhor solução é ele levar dois cadernos de 96 folhas. Tenhamos sempre em mente que, apesar de parecer óbvio nesse exemplo que os dois cadernos de 96 folhas, o algoritmo é um conjunto de passos pré-estabelecidos e o computador que executa o algoritmo, não raciocina, apenas executa. Outro exemplo muito comum do famoso problema da mochila é o investidor que deseja aplicar a maior quantidade de dinheiro possível, dentro de seus limites, entre as opções que ele tem. Mas, como o objetivo desse material está relacionado a matemática, deixemos esse debate de programação por aqui.

Há muitas aplicações de algoritmos recursivos em questões de teoria dos números. Um exemplo disso acontece nas equações de Pell. Para entender melhor, estudemos o exercício resolvido a seguir, que representa uma equação de Pell, levemente mais generalizada:

Problema 2 Prove que a equação

$$3x^2 - 11y^2 = 1$$

possui infinitas soluções inteiras positivas.

Solução: Considere o seguinte algebrismo:

$$\begin{gathered} 3x^2 - 11y^2 = 1 \\ \left(x\sqrt{3} + y\sqrt{11}\right) \cdot \left(x\sqrt{3} - y\sqrt{11}\right) = 1 \\ \left(x\sqrt{3} + y\sqrt{11}\right)^3 \cdot \left(x\sqrt{3} - y\sqrt{11}\right)^3 = 1^3 \end{gathered}$$

Aplicando os produtos notáveis $(a \pm b)^3 = \left(a^3 + 3ab^2\right) \pm \left(3a^2b + b^3\right)$, temos que:

$$\left[\left(3x^3\sqrt{3} + 33xy^2\sqrt{3}\right) + \left(9x^2y\sqrt{11} + 11\sqrt{11}y^3\right)\right] \cdot$$
$$\left[\left(3x^3\sqrt{3} + 33xy^2\sqrt{3}\right) - \left(9x^2y\sqrt{11} + 11\sqrt{11}y^3\right)\right] = 1$$
$$\boxed{3\left(3x^3 + 33xy^2\right)^2 - 11 \cdot \left(9x^2y - 11y^3\right)^2 = 1}$$

Portanto, temos que se (α, β) é solução da equação do enunciado, então $(3\alpha^2 + 33\alpha\beta^2, 9\alpha^2\beta + 11\beta^3)$ também é. Daí, como $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ é solução, então temos que a equação do enunciado tem infinitas soluções. Uma forma de se gerar infinitas soluções inteiras positivas (x, y) é dada pelo algoritmo a seguir:

1. Faça $x = 2$ e $y = 1$.
2. Faça $z = 3x^3 + 33xy^2$ e $w = 9x^2y + 11y^3$.
3. Faça $x = z$ e $y = w$.
4. Volte ao passo 2. ■

Por exemplo, temos que:

Passo	x	y	z	w
1	2	1	$-$	$-$
2	2	1	$3 \cdot 2^3 + 33 \cdot 2 \cdot 1^2 = 90$	$9 \cdot 2^2 \cdot 1 + 11 \cdot 1^3 = 47$
3	90	47	90	47
2	90	47	$3 \cdot 90^3 + 33 \cdot 90 \cdot 47^2$	$9 \cdot 90^2 \cdot 47 + 11 \cdot 47^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

No exemplo anterior, vemos a seguinte recorrência: a solução inicial $(2, 1)$ gera a segunda solução, $(90, 47)$, que gera a solução seguinte, que gera próxima a solução e assim sucessivamente.

Para terminar essa seção, vejamos um caso em que a ideia de recorrência não é tão transparente. No segundo teste do processo seletivo para a equipe que representou o Brasil na XXVIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul, caiu uma questão cuja recorrência, aplicando algoritmo, apresentava-se de forma diferente do comum: os casos maiores definiam os menores. Vejamos tal questão e sua solução:

Problema 3 *(Cone Sul/TST - 2017)* Tina escreve, na lousa, o produto a seguir:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Tina pode escolher alguns números, ou todos se ela quiser, e colocar um sinal de exclamação ao lado, transformando tal número em fatorial. Para quais $n \geqslant 2$, ela pode colocar sinais de excalmação de tal forma que o produto resultante seja um quadrado perfeito?

Por exemplo, para $n = 4$, temos que $1 \cdot 2! \cdot 3 \cdot 4! = 144 = 12^2$.

Solução: Em primeiro lugar, notemos que se p primo, então só haverá um fator p e, por isso, nunca será possível ter um quadrado perfeito, pois não será possível dois fatores p.

Além disso, observemos que, para um determinado primo p, $(p+1)!$ adiciona um segundo fator p, além de adicionar alguns outros. Então, considere os números primos menores que n. Sejam $p_1, p_2, \cdots p_k$ todos os números primos menores que n, em ordem crescente. Daí, considerando a lousa inicial de Tina, sem qualquer fatorial, percebamos que o algoritmo a seguir resolve o problema:

1. Torne todos os números primos $p_1, p_2, \cdots, p_k$ não marcados.
2. Seja j o maior número primo não marcado e seja i a paridade do fator de j atualmente na lousa.
3. Se i é ímpar, adicione fatorial ao $(j+1)$. (Note que se i é par, nada é feito nesse passo)
4. Marque o primo j.
5. Enquanto houver primo não marcado, isto é, $j \neq 2$, volte ao passo dois.

Por exemplo, aplicando o algoritmo para $n = 10$, temos:

lousa	j	i	primos marcados
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$	7	ímpar	$--$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8! \cdot 9 \cdot 10$	5	ímpar	7
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6! \cdot 7 \cdot 8! \cdot 9 \cdot 10$	3	impar	7, 5
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6! \cdot 7 \cdot 8! \cdot 9 \cdot 10$	2	par	7, 5, 3
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6! \cdot 7 \cdot 8! \cdot 9 \cdot 10$	$--$	$-$	7, 5, 3 e 2

Daí, temos que:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6! \cdot 7 \cdot 8! \cdot 9 \cdot 10 = 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2$$

Resposta: Portanto, para todo n composto, Tina pode escrever um quadrado perfeito na lousa. ■

Notemos que a solução acima, foi usando uma recorrência "invertida": os primos maiores primos definiam determinados fatoriais, ou não, e os menores ficaram por último. Esse tipo de algoritmo recursivo "invertido"é comum em questões de teoria dos números. O algoritmo euclidiano, muito usado para cálculo de *mdc* é uma famosa aplicação dessa ideia.

2 Algoritmo indutivo

Umas das técnicas mais famosas na teoria dos números é o princípio da indução. Resumidamente, tal princípio diz que uma propriedade P é válida para os números inteiros a partir de um número x qualquer (geralmente $x = 1$), se ela é válida para esse valor de x (caso inicial) e se podemos a partir de x provar que $x + 1$ tem a propriedade P. Notemos que a técnica de indução pode ser expressa de forma algorítmica:

1. Prove o caso inicial.
2. Suponha a hipótese de indução.
3. Prove o passo indutivo, usando a hipótese de induçao.

Uma questão clássica muito encontrada em teoria dos números, envolvendo algoritmos indutivos, é a ideia de pegar todos os termos de uma sequência num determinado momento e fazer algo com eles, como, por exemplo, multiplicar tudo, para gerar o próximo termo ou numa nova sequência de tamanho um a mais que a anterior, caracterizando a indução. A próxima questão é um exemplo disso:

Problema 4 *(OBM/2011)* Existem 2011 inteiros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2011}$ tais que, para todo $1 \leqslant i < j \leqslant 2011$, $mdc(a_i, a_j) = a_j - a_i$?

Solução: Sim. Vamos provar que podemos criar uma sequência de tamanho qualquer satisfazendo as condições do problema. Para isso, usando a sequência inicial $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, basta seguir o seguinte algoritmo:

1. Multiplique todos os elementos da sequência. Seja P tal produto.
2. Gere a nova sequência a partir dos seguintes passos
   (a) o primeiro termo é P
   (b) desloque, em um, os termos da sequência anterior e some P em cada um deles.
3. Volte para o passo inicial, usando a nova sequência

Aplicando o algoritmo mencionado, geraríamos as seguintes sequências:

Tamanho	Sequência
2	2 e 3
3	$2 \cdot 3 = 6$, $2 + 6 = 8$ e $3 + 6 = 9$
4	$6 \cdot 8 \cdot 9 = 432$, $6 + 432 = 438$, $8 + 432 = 440$ e $9 + 432 = 441$
$\vdots$	$\vdots$

■

No caso particular da solução anterior, a motivação do algoritmo é que, para $x \geqslant y$, temos que $mdc(x, y) = mdc(x - y, y)$ e daí, somar um termo constante e esperto P, a x e a y, torna o mdc invariante.

Vamos, então a última seção desse assunto: a questão 5 da IMO/2017.

3 Questão 5 da IMO/2017

Enfim, chegamos na última seção desse material: a questão *5* da *IMO/2017*, a IMO que foi considerada a mais difícil de todos os tempos, tendo em vista a quantidade necessária de pontos para ser medalha de ouro.

Antes de tudo, alguns dados interessantes sobre esse problema, dados esses obtidos diretamente do site oficial da IMO:

- Entre os 615 participantes da IMO, nesse problema, apenas 59 alunos obtiveram a pontuação máxima (7 pontos) e 451 estudantes obtiveram zero pontos.
- A maior soma de pontuação dos alunos de um país nesse problema foi 26, obtida por Hong Kong. A soma das pontuações dos alunos chineses foi 19.
- Os alunos russos somaram 8 pontos nesse problema, fato esse espantoso tendo em vista que a Rússia foi o país que propôs esse problema.

Os dados acima podem levar a acreditar que esse problema era muito difícil. Porém, na verdade, boa parte da solução consistia em ter a ideia algoritma correta.

Sem adiar mais, vamos à solução:

Problema 5 *(IMO/2017)* Seja $N \geqslant 2$ um inteiro dado. Um conjunto de $N(N+1)$ jogadores de futebol, todos de diferentes alturas, colocam-se em fila. O treinador deseja retirar $N(N-1)$ jogadores desta fila, de modo que a fila que sobra formada pelos $2N$ jogadores restantes satisfaça as N condições seguintes:

(1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos.

(2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto.

$\vdots$

(N) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais baixos.

Demonstre que isto é sempre possível.

Solução: Notemos que o enunciado fala em escolher $2N$ jogadores. Daí, é sugestivo a ideia de tentar dividir em N grupos de $(N+1)$ e escolher dois em cada grupo, de forma esperta. Essa ideia ficará mais clara no nosso passo indutivo.

Apliquemos, então, indução.

• Caso inicial ($N = 2$) O treinador deve escolher, num grupo de 6 jogadores, 4 de forma que os dois mais altos ficam juntos e os dois mais baixos também. Para isso, ele pode dividir a fila em duas: a primeira formada pelos três primeiros e a segunda formada pelos três últimos.

Pelo Principio da Casa dos Pombos, uma das duas filas tem, pelo menos, dois dos três jogadores mais altos. Pegue essa fila e selecione os dois mais altos dela. Além disso, a outra fila tem, pelo menos, dois dos três jogadores mais baixos. Pegue essa outra fila e selecione os dois mais baixos dela. Isso conclui o caso inicial.

• Hipótese indutiva ($N = T-1$) Suponha que seja possível selecionar $2T-2$ jogadores de um grupo de $(T-1)T$ jogadores nas condições do enunciado.

• Passo indutivo ($N = T$) Considere o grupo de $T(T+1)$ jogadores. Para chegar aos $2T$ jogadores procurados pelo enunciado, basta o treinador seguir o seguinte algoritmo:

1. Agrupar todos os jogadores em T grupos de $T+1$, conforme a posição deles. Por exemplo, os $(T+1)$ primeiros estão no grupo 1, os próximos $(T+1)$ estão no grupo 2 e assim sucessivamente.

2. Para cada grupo i, determine a_i (o jogador mais alto do grupo i) e b_i (o segundo jogador mais alto do grupo i).

3. Determine o grupo M, sendo tal grupo que possui o maior b_i, isto é, que possui, entre todos os segundos jogadores mais altos de cada grupo, o segundo jogador mais alto.

4. Selecione, então, os dois jogadores mais alto do grupo M

5. Descarte os demais jogadores do grupo M e o jogador mais alto de cada um dos outros $T-1$ grupos. Note que esse passo descartou $2T-2$ jogadores, incluindo os outros $T-1$ do grupo M não selecionados no passo anterior.

$$\underbrace{\cdot\ldots\cdot\times\cdot\ldots\cdot}_{\text{grupo 1}}\Big|\ldots\Big|\underbrace{\times\ldots\times\odot\times\ldots\times\odot\times\ldots\times}_{\text{grupo M}}\Big|\ldots\Big|\underbrace{\cdot\ldots\cdot\times\cdot\ldots\cdot}_{\text{grupo T}}$$

6. Aplique a hipótese indutiva aos $T(T+1)-2T = T(T-1)$ jogadores restantes. Houve subtração de $2T$ pois foram selecionados 2 jogadores, do grupo M, e descartados outros $2T-2$ jogadores no passo anterior.

■

Notemos que o último passo poderia ser trocado por “Se $T > 2$, troque T por $T-1$ e volte para o passo inicial e, caso $T = 2$, aplique o caso de escolher 4 jogadores num grupo de 6 jogadores (caso inicial)”.

Uma última observação importante sobre esse problema é que essa cota de $N(N+1)$ é a melhor cota para seleção de $2N$ jogadores nas condições do enunciado, para $N = 2$ e $N = 3$ bastando, para concluir isso, analisar as configurações $1, 5, 3, 4, 2$ e $1, 10, 6, 4, 3, 9, 5, 8, 7, 2, 11$, respectivamente, sendo i a altura do i-ésimo jogador mais alto, para todo $1 \leqslant i \leqslant N(N+1)$.

Agora, depois desse estudo sobre algoritmos, vamos praticar um pouco.

4 Exercícios extras sobre algoritmos e processos

4.1 Sobre TN

Problema 6 *(Sérvia/2010)* Uma tabela $n \times n$ preenchida com números $1, 2, \cdots, n^2$ é chamada *cabulosa* se todos os produtos de n números escritos em n quadradinhos *espalhados* deixam o mesmo resto na divisão por $n^2 + 1$. Existe uma tabela cabulosa para

a) $n = 8$?

b) $n = 10$?

Obs.: n quadradinhos são ditos espalhados se não há quaisquer dois deles na mesma linha ou mesma coluna

Problema 7 *(Rioplatense/2003)* Sejam n e k inteiros positivos. São dadas n progressões aritméticas infinitas de inteiros não negativos tais que entre quaisquer k inteiros não negativos há pelo menos um que pertence a alguma das n progressões. Sejam $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$ as razões de cada progressão e seja $r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$. Qual é o maior valor possível de r?

Problema 8 *(Sérvia/2015)* Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, determine a maior cardinalidade possível de um conjunto $\mathbb{A}$ do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 2^n\}$ com a seguinte propriedade:

$$\forall x, y \in \mathbb{A} \text{ com } x \neq y, v_2(x, y) \text{ é par}$$

sendo $v_2(a)$ a maior potência de 2 que divide a.

Problema 9 *(Balkan/2012)* Seja n um inteiro positivo. Seja

$$\mathbb{P}_n = \left\{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \cdots, 3^n\right\}$$

Para cada subconjunto $\mathbb{X}$ de $\mathbb{P}_n$, nós escrevemos $\mathbf{S}_{\mathbb{X}}$ como a soma dos elementos de $\mathbb{X}$, com a convenção de que $\mathbf{S}_{\emptyset} = 0$, sendo $\emptyset$ o conjunto vazio. Suponha que y é um número real tal que $0 \leqslant y \leqslant 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Prove que existe um subconjunto $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{P}_n$ tal que $0 \leqslant y - \mathbf{S}_{\mathbb{Y}} < 2^n$.

Problema 10 *(OBM/2017)* Seja $n \geqslant 3$ um inteiro. Prove que, para todo k inteiro com $1 \leqslant k \leqslant \binom{k}{2}$, existe um conjunto $\mathbb{A}$ com n elementos inteiros positivos distintos tais que o conjunto $\mathbb{B} = \{mdc(x, y) : x, y \in \mathbb{A}, x \neq y\}$ (obtido a partir do máximo divisor comum de todos os pares de elementos distintos de $\mathbb{A}$) contém exatamente k elementos distintos.

Problema 11 *(Sérvia/2016)* Dado quaisquer $2n-1$ subconjuntos de 2 elementos do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$, prove que sempre é possível escolher n desses subconjuntos de tal forma que a união deles possui no máximo $\dfrac{2}{3}n + 1$ elementos.

Problema 12 *(Rioplatense/2002)* Seja $\mathbb{A}$ um conjunto de números inteiros positivos. Dizemos que um conjunto $\mathbb{B}$ é uma base de $\mathbb{A}$ se todo elemento de $\mathbb{A}$ puder ser escrito como soma de elementos de algum subconjunto de $\mathbb{B}$ e, dados quaisquer dois subconjuntos de $\mathbb{B}$, a soma dos elementos de cada subconjunto é distinta. Dado um inteiro positivo n, mostre que existe um menor número $r(n)$ para o qual qualquer conjunto $\mathbb{A}$ de n elementos admite uma base com não mais que $r(n)$ elementos e, além disso, determine o valor de $r(n)$ para cada n.

4.2 Sobre outras coisas

Problema 13 *(Irã/TST - 2017)* No país Sugarland, há 13 estudantes disputando as 6 vagas da IMO. O processo seletivo consiste de 6 testes de seleção. Após os testes, verificou-se que não houve empate entre quaisquer dois estudantes em qualquer teste. Para selecionar o time da IMO, a comissão resolve escolher uma permutação desses 6 testes e começando, pela ordem definida na permutação, seleciona o estudante com a maior nota, entre os estudantes ainda não selecionados, para compor o time escolhendo assim o time dos 6 estudantes de Sugarland na IMO. Antes da escolha da permutação e depois dos 6 testes, é possível que todos os 13 estudantes tenham chances de ir para a IMO?

Problema 14 *(Sérvia/2015)* Um guarda propõe um jogo a 2015 prisioneiros. Todos os prisioneiros são colocados numa área e lá são colocados um chapéu na cabeça de cada prisioneiro. Cada prisioneiro pode ver os chapéus de todos os outros, mas não consegue ver o seu. Cada chapéu tem uma cor entre cinco cores possíveis. O guarda pergunta ao primeiro prisioneiro se ele sabe a cor do seu chapeú.

- Se a resposta é "Não", então ele morre ali mesmo, de forma que os outros prisioneiros ficam sabendo da morte dele.
- Caso contrário, ele é levado para uma outra sala, onde é perguntado sobre qual é a cor do seu chapéu.
  - Se o prisioneiro da sala acerta, ele se torna livre.
  - Caso contrário, ele morre.

Os outros prisioneiros não ouvem o que o prisioneiro da sala respondeu lá, mas sabem o resultado: liberdade ou morte.
Em seguida, o guarda escolhe o próximo prisioneiro e repete o mesmo processo de perguntar a cor do chapeú e etc e assim sucessivamente até perguntar ao último prisioneiro vivo. Os prisioneiros podem elaborar uma estratégia antes do jogo começar, mas não é permitida comunicação entre eles depois que o jogo começa. Qual é o número máximo de prisioneiros que podem garantir a liberdade usando uma estratégia ótima?

Problema 15 *(Romênia/TST - 2012)* Encontre o número máximo de reis que podem ser colocados num tabuleiro de xadrez 12×12 tal que cada rei ataca exatamente um dos outros reis.

Problema 16 Generalize a questão anterior para $n \times n$.

Problema 17 *(Sérvia/2017)* Encontre o número máximo de rainhas que podem ser colcoadas num tabuleiro de xadrez 2017×2017 tal que cada rainha ataca no máximo uma outra rainha.

Problema 18 *(Rioplatense/2002)* Daniel escolhe um número inteiro positivo n e o diz a Ana. Com esta informação, Ana escolhe um inteiro positivo k e o diz a Daniel. Então, Daniel desenha n circunferências em um papel e escolhe k pontos distintos com a condição de que cada um deles pertença a alguma circunferência que ele desenhou. Em seguida, ele apaga as circunferências, deixando visíveis apenas os k pontos. A partir desses pontos, Ana deve reconstruir pelo menos uma das circunferências que Daniel desenhou. Determine o menor valor de k que permite a Ana alcançar seu objetivo independente de como Daniel desenhe as n circunferências ou escolha seus k pontos.

Problema 19 *(USAMO/2005)* Seja n um inteiro maior que 1. Considere $2n$ pontos no plano, de forma que entre eles não há três colineares. Suponha que n desses $2n$ pontos são coloridos de verde e os outros n pontos são coloridos de amarelo. Uma reta do plano é chamada *reta balançeada* seela passa por exatamente um ponto verde e um ponto amarelo e, para cada lado da reta, o número de pontos verdes é igual ao número de pontos amarelos em cada lado. Prove que existe pelo menos duas retas balanceadas.

Problema 20 *(Ibero/2017)* Consideremos as configurações de números inteiros

$$\begin{array}{lllll} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{2017,1} & a_{2017,2} & a_{2017,3} & \cdots & a_{2017,2017} \end{array}$$

onde $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos os i,j tais que $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 2016$.

Determine o número máximo de inteiros ímpares que uma tal configuração pode conter.

Problema 21 *(Sérvia/2017)* Existe $2n-1$ lâmpadas em linha. Inicialmente, somente a lâmpada central (a n-ésima) está acesa, enquanto as demais estão apagadas. O único movimento permitido é escolher uma sequência consecutiva de lâmpadas, com pelo menos três lâmpadas, de tal forma que as lampâdas mais à esquerda e à mais a direita estão apagadas e as demais lâmpada dessa sequência estão acesas e, então, trocar os estados delas: as acesas tornam-se apagadas e vice-versa. Por exemplo, se a sequência escolhida é $\bullet \circ \circ \circ \bullet$, então após o movimento obteremos a sequência $\circ \bullet \bullet \bullet \circ$. Determine a quantidade máxima de movimentos permitidos que podem ser feitos.

4.3 IMO e IMO/SL

Problema 22 *(IMO/SL-2013)* Seja n um inteiro positivo. Encontre o menor inteiro k com a seguinte propriedade: dados quaisquer d números reais $a_1, \cdots, a_d$ tais que $a_1 + \cdots + a_d = n$ e $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ para $i = 1, 2, \cdots, d$, é possível particionar esse números em k grupos (alguns deles podem ser vazios) de forma que a soma dos números em cada grupo é no máximo 1.

Problema 23 *(IMO/2011)* Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \cdots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não esteja na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.
Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

Problema 24 *(IMO/2014)* Seja $n \geqslant 2$ um inteiro. Considere um tabuleiro de xadrez $n \times n$ dividido em n^2 quadrados unitários. Uma configuração de n torres neste tabuleiro é dita *pacífica* se cada linha e cada coluna contém exatamente uma torre. Encontre o maior inteiro positivo k tal que, para qualquer configuração pacífica de n torres, podemos encontrar um quadrado $k \times k$ sem torres em qualquer um dos seus k^2 quadrados unitários.

Problema 25 *(IMO/2011)* Seja $\mathbb{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em $\mathbb{S}$ não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathbb{S}$. Roda-se ℓ no sentindo dos ponteiros do relógio ao redor do *pivot* P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de $\mathbb{S}$, que denotaremos por Q. Com Q como novo pivot, a reta continua a roda no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de $\mathbb{S}$. Este processo continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de $\mathbb{S}$.
Demonstre que se pode escolher um ponto $P \in \mathbb{S}$ e uma reta ℓ que passa por P tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de $\mathbb{S}$ como pivot infinitas vezes.

Problema 26 *(IMO/SL-2011)* Prove que, para todo inteiro positivo n, o conjunto $\{2, 3, \cdots, 3n+1\}$ pode ser particionado em n triplas de tal forma que os números em cada tripla são os lados de algum triângulo obtusângulo.

Problema 27 *(IMO/2014)* Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que e possível dividir esta coleção em 100 ou menos grupos de moedas, cada um com valor total de no máximo 1.

Problema 28 *(IMO/2014)* Um conjunto de retas no plano está em *posição geral* se não há duas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto. Um conjunto de retas em posição geral corta o plano em regiões, algumas com área finita, chamadas *regiões finitas*. Prove que, para todo n suficientemente grande, em qualquer conjunto de n retas em posição geral é possível pintar de azul pelo menos $\sqrt{n}$ dessas restas, de modo que nenhuma das suas regiões finitas tenha uma fronteira completamente azul.

Nota: Para resultados em que $\sqrt{n}$ é substituído por $c\sqrt{n}$ serão atribuídos pontos conforme o valor da constante c.