Circunferências tangentes entre si
e o Lema da estrela da morte

Semana Olímpica/2018 - Nível 2

Prof. Armando Barbosa

Maceió, 25 de janeiro de 2018

1 Exercícios extras

Problema 1 *(Coreia do Sul/2016)* Num triângulo acutângulo ABC, sejam D e E os pés das alturas relativas aos pontos B e C em tal triângulo. Sejam S e T as reflexões do ponto E em relação aos lados AC e BC, respectivamente. Seja $X \neq C$ o segundo ponto de interseção de (CST) e AC. Sendo O o circuncentro do triângulo CST, prove que $XO \perp DE$.

Problema 2 *(EGMO/2016)* Duas circunferências ω_1 e ω_2 de raios iguais intersectam-se nos pontos X_1 e X_2. Considere uma circunferência ω tangente externamente a ω_1 em T_1 e tangente internamente a ω_2 em T_2. Prove que o ponto de encontro dos prolongamentos de X_1T_1 e X_2T_2 pertence a ω.

1.1 Lema da estrela da morte

Problema 3 *(Centroamericana/2010)* Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências tangentes internamente entre si em A com centros O e O_1 e raios r e r_1, respectivamente, com $r > r_1$. Seja B o ponto diametralmente oposto a A em Γ e seja C um ponto de Γ tal que BC é tangente a Γ_1 no ponto P. Seja A' o ponto médio de BC. Sabendo que $OA' \parallel AP$, calcule $\dfrac{r}{r_1}$.

Problema 4 *(Romênia/TST - 2015)* Seja r o raio da circunferência inscrita do $\triangle ABC$. Seja R_A o raio da circunferência tangente internamente a (ABC) no ponto A e tangente ao lado BC. Os raios R_B e R_C são definidos analogamente. Prove que

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leqslant \frac{2}{r}$$

2 Outras soluções

Problema 5 *(Belarus/2016)* Seja P o ponto onde o A-exincírculo ω_A do triângulo ABC toca o lado $\overline{BC}$. Sejam I_1 e I_2 os centros do A-exincírculos em relação aos triângulos ABP e ACP, respectivamente. Prove que (I_1I_2P) é tangente a ω_A.

Solução: Se queremos (I_1I_2P) tangente a ω_A, então a reta ℓ tangente em comum a ambas para pelo ponto P, pois tal ponto está nas duas circunferências. Esse será nosso objetivo.

Sendo $2p$ o perímetro do $\triangle ABC$, é conhecido que:

$$p = AB + BP = AC + CP$$

Além disso, sendo F e F' os pontos onde o A-exincírculo toca o prolongamento de AP em relação a $\triangle ABP$ e $\triangle ACP$, respectivamente, e usando o resultado anterior, podemos concluir que:

$$AF = \frac{AB + BP + PA}{2} \qquad AF' = \frac{AC + CP + PA}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{p + AP}{2} = AF = AF' \Rightarrow \boxed{F \equiv F'}$$

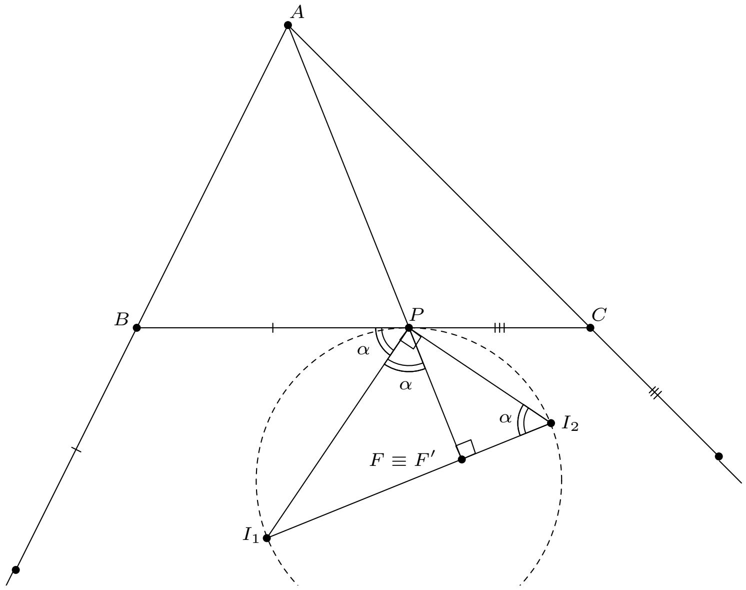
Consequentemente, também temos que:

$$I_1F \perp AP \qquad I_2F \perp AP$$
$$\Rightarrow \boxed{I_1,\ I_2 \text{ e } F \text{ são colineares}}$$

Por último, sendo $\alpha = \angle BPI_1$, podemos concluir que:

$$\angle I_1PF = \alpha$$
$$\angle I_2PF = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$
$$\triangle PI_2F \Rightarrow \boxed{\angle PI_2F = \alpha = \angle BPI_1}$$

Da última conclusão, temos que: BP é tangente a (PI_1I_2). Como BC é tangente a ω_a, então podemos concluir que (PI_1I_2) é tangente a ω_A, pois BC é reta tangente a ambas.

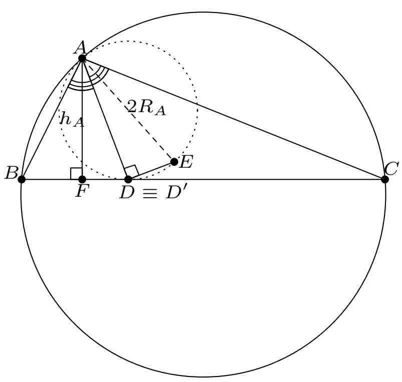


■

Problema 6 *(Romênia/TST - 2015)* Seja r o raio da circunferência inscrita do $\triangle ABC$. Seja R_A o raio da circunferência tangente internamente a (ABC) no ponto A e tangente ao lado BC. Os raios R_B e R_C são definidos analogamente. Prove que

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leqslant \frac{2}{r}$$

Solução: Comecemos por um bom desenho.



Sejam $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ os lados do $\triangle ABC$. Seja D o ponto onde a bissetriz interna de $\angle BAC$ encontra BC e seja D' o ponto onde a circunferência de raio R_A toca o lado BC.

Pelo lema da estrela da morte, temos que AD' é bissetriz interna de $\angle BAC$. Portanto, podemos concluir que $\boxed{D \equiv D'}$.
Seja E o antípoda (isto é, ponto diametralmente oposto) de A em relação à circunferência de raio R_A.
Traçando a altura $h_A = AF$ em relação ao $\triangle ABC$, temos que:

$$\begin{aligned} \triangle ADE &\Rightarrow AD \leqslant 2R_A \\ \triangle AFD &\Rightarrow AF \leqslant AD \\ AF \leqslant 2R_A &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_A} \leqslant \frac{2}{h_A}} \end{aligned}$$

Analogamente, podemos concluir que:

$$\frac{1}{R_B} \leqslant \frac{2}{h_B} \qquad \frac{1}{R_C} \leqslant \frac{2}{h_C}$$

Daí, sendo $[ABC]$ a área do $\triangle ABC$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} &\leqslant \frac{2}{h_A} + \frac{2}{h_B} + \frac{2}{h_C} \\ &\leqslant \frac{a}{[ABC]} + \frac{b}{[ABC]} + \frac{c}{[ABC]} \\ &\leqslant \frac{a+b+c}{[ABC]} \end{aligned}$$

Sendo $2p$ o perímetro do $\triangle ABC$, é conhecido que $[ABC] = p \cdot r$. Com isso, podemos concluir que:

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leqslant \frac{a+b+c}{[ABC]} = \frac{2p}{p \cdot r} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leqslant \frac{2}{r}}$$

$\blacksquare$