XII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

Santiago de Chile, 3 de julho de 2001

PRIMEIRO DIA
DURAÇÃO: 3 horas e meia.

PROBLEMA 1

Em cada casa de um tabuleiro quadriculado 2000×2000 deve-se escrever um dos três números: –1, 0 ou 1. Se, em seguida, somam-se os números escritos em cada linha e cada coluna, obtêm-se 4000 resultados. Mostre que é possível preencher o tabuleiro de modo que os 4000 resultados assim obtidos sejam todos distintos.

PROBLEMA 2

Tem-se uma sucessão $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ de números inteiros positivos, com as seguintes propriedades:

i) Todo número inteiro positivo aparece uma ou mais vezes na sucessão.
ii) $a_1 = 1$
iii) $a_{3n+1} = 2a_n + 1$
iv) $a_{n+1} \geq a_n$
v) $a_{2001} = 200$

Calcule o valor de a_{1000}.

PROBLEMA 3

Três triângulos acutângulos estão inscritos em uma mesma circunferência, de modo que seus vértices são nove pontos distintos. Demonstre que se pode escolher um vértice de cada triângulo de maneira que os três pontos escolhidos determinem um triângulo cujos ângulos sejam menores que ou iguais a 90°.

XII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Santiago de Chile, 4 de julho de 2001

SEGUNDO DIA
DURAÇÃO: 3 horas e meia.

PROBLEMA 4
Um polígono de área S está contido no interior de um quadrado de lado a. Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior que ou igual a $\frac{S}{a}$.

PROBLEMA 5
Ache todos os números inteiros positivos m tais que $m + 2001 \cdot S(m) = 2m$ onde $S(m)$ representa a soma dos algarismos de m.

PROBLEMA 6
Seja g uma função definida para todo inteiro positivo n, que satisfaz

i) $g(1) = 1$
ii) $g(n+1) = g(n) + 1$ ou $g(n+1) = g(n) - 1$ para todo $n \geq 1$
iii) $g(3n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$
iv) $g(k) = 2001$ para algum inteiro positivo k.

Ache o menor valor possível de k entre todas as funções g que cumprem as condições anteriores e demonstre que é o menor.