XIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Fortaleza – CE, 25 de junho de 2002

Primeiro dia

Duração da prova: 4 horas

PROBLEMA 1:

Os alunos da turma de Pedro praticam a soma e a multiplicação de números inteiros. A professora escreve os números de 1 a 9 em nove fichas, uma para cada número, e as coloca em uma urna. Pedro retira três fichas e deve calcular a soma e o produto dos três números correspondentes. Ana e Julián fazem o mesmo, esvaziando a urna. Pedro informa à professora que retirou três números consecutivos cujo produto é 5 vezes a soma. Ana informa que não tem nenhum número primo, mas sim dois consecutivos e que o produto desses três números é 4 vezes a soma dos mesmos. Quais números retirou Julián?

PROBLEMA 2:

De um triângulo ABC, retângulo em A, conhecemos: o ponto T de tangência da circunferência inscrita em ABC com a hipotenusa BC, o ponto D de interseção da bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$ com o lado AC e o ponto E de interseção da bissetriz interna do ângulo $\hat{C}$ com o lado AB. Descreva uma construção com régua e compasso para obter os pontos A, B e C. Justifique.

PROBLEMA 3:

Arnaldo e Bernardo jogam uma Super Batalha Naval. Cada um tem um tabuleiro n x n. Arnaldo coloca barcos em seu tabuleiro (pelo menos um mas não se sabe quantos). Cada barco ocupa as n casas de uma linha ou de uma coluna e os barcos não podem se superpor nem ter um lado comum. Bernardo marca m casas (representando tiros) em seu tabuleiro. Depois que Bernardo marcou as m casas, Arnaldo diz quais dentre elas correspondem a posições ocupadas por barcos. Bernardo ganha se, a seguir, descobre quais são as posições de todos os barcos de Arnaldo. Determine o menor valor de m para o qual Bernardo pode garantir sua vitória.

XIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Fortaleza – CE, 26 de junho de 2002

Segundo dia

Duração da prova: 4 horas

PROBLEMA 4:

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a interseção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

PROBLEMA 5:

Considere o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada inteiro k, seja r_k a maior quantidade de elementos distintos de A que podemos escolher de maneira que a diferença entre dois números escolhidos seja sempre diferente de k. Determine o maior valor possível de r_k, onde $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

PROBLEMA 6:

Dizemos que um inteiro n, n, > 1, é *ensolarado* se ele é divisível pela soma dos seus fatores primos. Por exemplo, 90 é ensolarado pois $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $2 + 3 + 5 = 10$ divide 90. Mostre que existe um número ensolarado com pelo menos 10^{2002} fatores primos distintos.