XXVIII Olimpiada Matemática
de Países del Cono Sur
Guayaquil - Ecuador

XXVIII Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur
Guayaquil - Ecuador, 2017

Quinta-feira, 17 de agosto de 2017

Primeiro dia

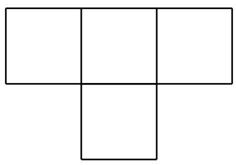
Problema 1. Um número inteiro positivo n se denomina *guayaquileño* se a soma dos dígitos de n é igual à soma dos dígitos de n^2. Achar todos os possíveis valores que pode assumir a soma dos dígitos de um número guayaquileño.

Problema 2. Denotamos por $A(XYZ)$ a área do triângulo XYZ. Diz-se que um polígono $P_1P_2\ldots P_n$ convexo não-regular de n lados é *guayaco* se existe um ponto O em seu interior tal que:

$$A(P_1OP_2) = A(P_2OP_3) = \ldots = A(P_{n-1}OP_n) = A(P_nOP_1).$$

Demostrar que, para todo inteiro $n \geq 3$, existe um polígono guayaco de n lados.

Problema 3. Seja n um inteiro positivo. Tem-se um tabuleiro quadriculado $4 \times 4n$ dividido em casinhas 1×1, e $4n$ peças como a que se mostra na figura abaixo. Determinar de quantas maneiras se pode cobrir totalmente o tabuleiro com essas peças.



Idioma: Português

Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos

XXVIII Olimpiada Matemática
de Países del Cono Sur
Guayaquil - Ecuador

XXVIII Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur
Guayaquil - Ecuador, 2017

Sexta-feira, 18 de agosto de 2017

Segundo dia

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo cujo circuncentro é O. Sejam pontos X e Y tais que:

- $\angle XAB = \angle YCB = 90°$
- $\angle ABC = \angle BXA = \angle BYC$
- X y C estão em semiplanos distintos com relação a AB
- Y y A estão en semiplanos distintos con relação a BC

Demostrar que O é o ponto médio de XY.

Problema 5. Sejam a, b e c inteiros positivos. Definem-se três sequências tais que:

- $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$
- $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n b_n} \right\rfloor$, $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n c_n} \right\rfloor$, $c_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{c_n a_n} \right\rfloor$ para todo $n \geq 1$

a. Demostrar que, para quaisquer a, b, c, existe um inteiro positivo N tal que $a_N = b_N = c_N$.

b. Achar o menor inteiro positivo N tal que $a_N = b_N = c_N$ para alguma escolha de a, b, c tais que $a \geq 2$ e $b + c = 2a - 1$.

Nota: Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ a *parte inteira* do número real x, por exemplo $\lfloor 2{,}8 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Problema 6. A sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros positivos se define da seguinte maneira: $a_1 = 1$ e, para cada $n \geq 2$, a_n é o menor inteiro positivo distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tal que:

$$\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \ldots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}} \quad \text{é um inteiro.}$$

Demostrar que todos os inteiros positivos aparecem na sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Idioma: Português

Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos