V OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL
Uruguai 1994

PROBLEMA 1
O inteiro positivo *N* tem 1994 dígitos. Destes, 14 são iguais a zero e os números de vezes que aparecem os demais dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, estão na razão 1:2:3:4:5: 6:7:8:9, respectivamente.
Demonstrar que *N* não é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 2
Considera-se uma circunferência (*C*) de diâmetro *AB* = 1 . Escolhe-se um ponto P_0 na circunferência, distinto de *A*, e a partir de P_0 constrói-se uma sucessão de pontos $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ da circunferência, da seguinte maneira:
Q_n é o simétrico de *A* em relação a de P_n e a reta que une *B* e Q_n corta a circunferência (*C*) nos pontos *B* e P_{n+1} (não necessariamente diferentes).

Demonstrar que é possivel escolher P_0 tal que se cumpram simultáneamente:

(i) O ângulo P_0AB é menor que 1
(ii) Na sucessão gerada a partir de P_0 há dois pontos P_k e Pj tais que o triângulo AP_kP_j é equilátero.

PROBLEMA 3
Seja *p* um número real positivo dado.
Encontre o mínimo valor de $x^3 + y^3$ sabendo que *x* e *y* são números reais positivos tais que *x*.*y*.(*x* + *y*) = *p*.

PROBLEMA 4
Pedro e Cecilia participam num jogo com as seguintes regras:
Pedro escolhe um número inteiro positivo *a* e Cecilia ganha dele se ela encontra um número inteiro positivo *b*, primo com *a*, tais que na decomposição em fatores primos de $a^3 + b^3$ apareçam pelo menos três fatores primos distintos.
Demonstrar que Cecilia sempre ganha.

PROBLEMA 5
Determinar infinitos ternos *x*, *y*, *z* de inteiros positivos que sejam soluções da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, tais que o máximo divisor comum de *x*, *y*, *z* seja 1.

PROBLEMA 6

Seja *ABC* um triângulo retângulo em *C*. Sobre o lado *AB* toma-se um ponto *D*, de modo que $CD = k$, e os raios das circunferências inscritas nos triângulos *ADC* e *CDB* são iguais.

Demonstrar que a área do triângulo *ABC* é igual a k^2.