8ª. OLIMPÍADA DO CONE SUL

21 a 25 de Abril de 1997. Assunção, Paraguai.

Primeiro dia.
Tempo: três horas.

PROBLEMA 1

De cada número inteiro positivo n, $n \leq 99$, subtraímos a soma dos quadrados de seus algarismos. Para que valores de n esta diferença é a maior possível?

PROBLEMA 2

Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro dela e R um ponto qualquer em C distinto de A e de B. Seja P a interseção da perpendicular traçada por O a AR. Sobre a reta OP se marca o ponto Q, de maneira que QP é a metade de PO e Q não pertence ao segmento OP. Por Q traçamos a paralela a AB que corta a reta AR em T.
Chamamos de H o ponto de interseção das retas AQ e OT.
Provar que H, R e B são colineares.

PROBLEMA 3

Demonstrar que existem infinitos ternos (a, b, c), com a, b, c números naturais, que satisfazem a relação: $2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 1997$.

Segundo dia.
Tempo: três horas.

PROBLEMA 4

Considere um tabuleiro de n linhas e 4 colunas.
Na 1ª. linha são escritos 4 zeros (um em cada casa). A seguir, cada linha é obtida a partir da linha anterior realizando a seguinte operação: uma das casas, a escolher, é mantida como na linha anterior; as outras três são trocadas: se na linha anterior havia um 0, coloca-se 1; se havia 1, coloca-se 2; e se havia 2, coloca-se 0.
Construa o maior tabuleiro possível com todas as suas linhas distintas e demonstre que é impossível construir um maior.

PROBLEMA 5

Seja n um número natural, $n > 3$.
Demonstrar que entre os múltiplos de 9 menores que 10^n há mais números com a soma de seus dígitos igual a $9(n-2)$ que números com a soma de seus dígitos igual a $9(n-1)$.

PROBLEMA 6

Considere un triângulo acutângulo ABC, e seja X um ponto do plano do triângulo.
Sejam M, N e P as projeções ortogonais de X sobre as retas que contêm as alturas do triângulo ABC. Determinar para que posições de X o triângulo MNP é congruente a ABC.

Nota: a projeção ortogonal de um ponto X sobre uma reta l é a interseção de l com a perpendicular a ela que passa por X.